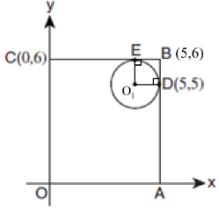


הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 8-1)

1. עלינו למצוא את אורכו של הישר CE בסרטוט הנתון.



נתון ש-OABC הוא מלבן, ולפיכך הישרים AB ו-CB מקבילים לצירים x ו-y בהתאמה. לפיכך, ערך ה-y של נקודה B יהיה ערך זהה לערך ה-y של נקודה C, וערך ה-x של נקודה B יהיה ערך זהה לערך ה-x של נקודה D. מכאן ששיעורי נקודה B הם (5, 6). אורכו של הישר BD יהיה שווה להפרש בין ערכי ה-y של הנקודות B ו-D, כלומר ל-1.

כעת נעביר בניית עזר רדיוסים ממרכז המעגל הקטן שבסרטוט (נקרא לו O_1) לעבר נקודות ההשקה D ו-E. הזוויות בין הרדיוסים לנקודות ההשקה שוות ל- 90° , ולפיכך מתקבל ריבוע O_1EBD . מצאנו שאורכו של BD שווה ל-1, ולכן גם אורכו של EB יהיה שווה ל-1. מכיוון ש-CE שווה להפרש בין CB (שאורכו שווה לערך ה-x של נקודה B, כלומר ל-5), ל-EB, נקבע כי CE שווה ל-4. הערה: O_1EBD הוא ריבוע כיוון שיש לו זוג צלעות סמוכות שוות (הרדיוסים שהעברנו), ושלוש זוויות ישרות.

תשובה (4).

2. עלינו לפשט את הביטוי $|x - y| - |y - x|$.

דרך א': הבנה אלגברית

נזכור כי $|x - y| = |y - x|$, ומכאן שערכו של הביטוי יהיה בהכרח שווה ל-0.

דרך ב': הצבת דוגמה מספרית

נציב $x = y = 1$ ונקבל שערכו של הביטוי יהיה שווה ל-0 ($|1 - 1| - |1 - 1| = |0| - |0| = 0$).

כעת נציב את המספרים בתשובות וננסה לפסול בעזרתם שלוש תשובות:

תשובה (1): $4 = (2 \cdot 1 + 2 \cdot 1)$. ערכו של הביטוי שונה מ-0 ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (2): $-2 = (-2 \cdot 1)$. ערכו של הביטוי שונה מ-0 ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (3): $2 = (2 \cdot 1)$. ערכו של הביטוי שונה מ-0 ולכן התשובה נפסלת.

פסלנו שלוש תשובות, ולפיכך התשובה הנותרת בהכרח נכונה.

תשובה (4).

3. לפנינו שאלת אחוזים. מבקשים שנמצא בכמה אחוזים עלה מחיר שמלה ביום רביעי לעומת יום ראשון. מכיוון שבשאלה אין נתונים ממשיים, ניעזר בהצבת דוגמה מספרית כדי לפתור אותה. נניח שמחיר החולצה ביום ראשון היה 100 שקלים. ביום שני הוא עלה ב-100% לעומת מחירה ביום ראשון, כלומר ב-100 $\left(\frac{100}{100} \cdot 100 = 100\right)$ שקלים נוספים, כך שמחירה ביום שני היה 200 $(100 + 100 = 200)$ שקלים. ביום שלישי מחיר החולצה עלה ב-50% לעומת המחיר ביום שני, כלומר ב-100 $\left(\frac{50}{100} \cdot 200 = 100\right)$ שקלים נוספים, כך שמחירה ביום שלישי היה 300 $(200 + 100 = 300)$ שקלים. ביום רביעי מחיר החולצה עלה ב-25% לעומת המחיר ביום שלישי, כלומר ב-75 $\left(\frac{25}{100} \cdot 300 = 75\right)$ שקלים נוספים, כך שמחירה ביום רביעי היה 375 $(300 + 75 = 375)$ שקלים. אם מחיר השמלה ביום ראשון היה 100 שקלים, ומחיר השמלה ביום רביעי עלה ב-275 $(375 - 100 = 275)$ שקלים לעומת מחיר זה, הרי שמחיר שמלה ביום רביעי עלה ב-275% $\left(\frac{275}{100} \cdot 100 = 275\right)$ לעומת יום ראשון.

תשובה (4).

4. עלינו למצוא מה נפח העץ בכיסא, אם ידועות לנו המידות של רגלי הכיסא, ולוחות העץ שיחד מרכיבים אותו. נשים לב שגם 4 רגלי הכיסא, וגם 2 לוחות העץ הם בצורת תיבה. על פי הנוסחה לחישוב נפח תיבה יש לכפול את שלשת האורכים שלה זה בזה. לכן, נפח כל רגל של הכיסא יהיה שווה ל-50 $(1 \cdot 1 \cdot 50 = 50)$ סמ"ק, ונפח כל לוח עץ יהיה שווה ל-2,500 $(50 \cdot 50 \cdot 1 = 2,500)$ סמ"ק. נפח העץ בכיסא יהיה שווה ל-5,200 $(4 \cdot 50 + 2 \cdot 2,500 = 5,200)$ סמ"ק.

תשובה (1).

5. לפנינו שאלת הספק. נתון ש-3 מכוונות הפועלות יחד בקצב קבוע שואבות 5 ליטרים של מים בשעה, ושואלים אותנו בכמה שעות ישאבו 2 מכוונות יחד 20 ליטרים של מים. אם 3 מכוונות שואבות 5 ליטרים של מים בשעה, הרי שלמכונה בודדת ייקח פי 3 זמן לשאוב את אותה כמות מים. כלומר, מכונה בודדת תשאב 5 ליטרים של מים ב-3 שעות. כדי לשאוב 20 ליטרים של מים, כלומר כמות גדולה פי 4 $\left(\frac{20}{5} = 4\right)$ של מים, תאלץ המכונה לעבוד פי 4 זמן, כלומר 12 $(4 \cdot 3 = 12)$ שעות. ל-2 מכוונות ייקח מחצית מהזמן שהיה לוקח למכונה בודדת לשאוב את כמות המים הנדרשת, כלומר 6 $\left(\frac{12}{2} = 6\right)$ שעות.

תשובה (1).

6. לפנינו משוואה בשני נעלמים חיוביים (a, b) , ועלינו להביע את a באמצעות b . נבודד את a באמצעות חוקי אלגברה:

$$(a-1)(a^2+a+1) = b^3 - 1$$

תחילה נטפל בביטוי בצד שמאל של המשוואה. לאחר פתיחת סוגריים נקבל:

$$a^3 + a^2 + a - a^2 - a - 1 = b^3 - 1$$

לאחר כינוס איברים נקבל: $a^3 - 1 = b^3 - 1$

אם $a^3 = b^3$ ($a^3 - x = b^3 - x \Rightarrow$), הרי שבהכרח $a = b$.

תשובה (1).

7. נשאלנו בכמה אפשרויות אפשר לסדר את ימות השבוע מחדש, כך שיום ראשון לא ייפול במקומו הרגיל.

בתשובות מופיעים מספרים גדולים המוצגים באמצעות חזקות ועצרות. כלומר, התשובות מופיעות בצורה של מכפלה. לכן, נפרק את הסידור הנדרש למספר מאורעות, נחשב את כמות האפשרויות לכל מאורע, ולבסוף נבצע פעולת כפל.

היום הראשון בשבוע החדש לא יכול להיות יום ראשון המקורי, אך הוא יכול להיות כל אחד משאר ששת ימי השבוע. לכן, מספר האפשרויות ליום הראשון בשבוע החדש הוא 6.

היום השני בשבוע החדש יכול להיות כל אחד מימות השבוע, פרט לזה שנבחר להיות היום הראשון בשבוע החדש. לכן, מספר האפשרויות ליום השני בשבוע החדש יהיה גם כן 6.

היום השלישי בשבוע החדש יכול להיות כל אחד מימות השבוע, פרט לשני הימים שנבחרו להיות היום הראשון והשני בשבוע החדש. לכן, מספר האפשרויות ליום השלישי בשבוע החדש יהיה 5.

היום הרביעי בשבוע החדש יכול להיות כל אחד מימות השבוע, פרט לשלשת הימים שנבחרו להיות היום הראשון, השני והשלישי בשבוע החדש. לכן, מספר האפשרויות ליום הרביעי בשבוע החדש יהיה 4.

וכך הלאה. מספר האפשרויות ליום החמישי בשבוע החדש יהיה 3, מספר האפשרויות ליום השישי בשבוע החדש יהיה 2, ומספר האפשרויות ליום השביעי בשבוע החדש יהיה 1.

נותר לנו לכפול את מספר האפשרויות לכל אחד מימות השבוע ונקבל:

$$6 \cdot 6! = (6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$$

תשובה (2).

8. נשאלנו לכמה שווה x אם ידוע שהמוצע של x ו- y שווה להפרשם, ושהמוצע של x^2 ו- y^2 שווה ל-500. תחילה נמיר את המלל לאלגברה. מהנתון הראשון נקבל את המשוואה $\frac{x+y}{2} = x - y$,

$$\frac{x^2 + y^2}{2} = 500$$

וקיבלנו שתי משוואות בשני נעלמים, ונותר לנו לחלץ מהן את x .

$$\left(\frac{x+y}{2} = x - y \Rightarrow x + y = 2x - 2y \Rightarrow \right) 3y = x$$

נציב $x = 3y$ במשוואה השנייה ונקבל:

$$\left(\frac{(3y)^2 + y^2}{2} = 500 \Rightarrow \frac{9y^2 + y^2}{2} = 500 \Rightarrow \frac{10y^2}{2} = 500 \Rightarrow 10y^2 = 1,000 \Rightarrow y^2 = 100 \Rightarrow \right) y = 10$$

נותר לנו להציב $y = 10$ במשוואה $x = 3y$, ונקבל ש- $x = 30$.

תשובה (3).

הסקה מתרשים (שאלות 9-12)

9. נשאלנו באיזה סוג משחק שיחקו רק פעם אחת ב-10 המשחקים האחרונים של הטורניר. נתון שהמשחקים נערכו על פי סדר השחקנים: ראשית שיחק A מול כל השחקנים לפי סדרם, אז שיחק B מול כל השחקנים מלבד A, שמולו כבר שיחק, וכן הלאה, עד שכל שחקן שיחק פעם אחת מול כל שחקן אחר.

לפיכך 10 המשחקים האחרונים ששוחקו הם המשחקים המתוארים בחלק זה של הטבלה:

☆ ↑ 10	△ ↑ 7	☆ → 6	○ → 1						E
△ → 2	△ ↑ 1	○ ↑ 3							F
♡ ↑ 9	○ ↑ 2								G
△ → 1									H
									I

סוג המשחק מתואר בטבלה באמצעות אחת מארבע הצורות: כוכב, לב, משולש ועיגול, ולכן כדי לדעת באיזה סוג משחק שיחקו רק פעם אחת ב-10 המשחקים האחרונים של הטורניר, עלינו לחפש בחלק זה של הטבלה צורה המופיעה פעם אחת בלבד.

סימון לב, המייצג את המשחק "לבבות וחרבות", מופיע רק פעם אחת, ולכן זו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

10. נשאלנו כמה משחקים היו מתווספים לטורניר אילו היה משתתף בו עוד שחקן. בטורניר המתואר בטבלה מתקיים בדיוק משחק אחד בין כל שני שחקנים המשתתפים בו. לכן, אם יתווסף שחקן נוסף, הרי שגם הוא יקיים משחק אחד מול כל אחד משאר השחקנים הקיימים. מכיוון שיש נכון להיום 9 שחקנים בטורניר (A-I), הרי שיתווספו לטורניר 9 משחקים נוספים.

תשובה (2).

11. נשאלנו מה המשחק הבא ששיחק השחקן ששיחק פעמיים ברצף ב"כוכבי הפלא". המשחק "כוכבי הפלא" מסומן בתרשים באמצעות כוכב. תחילה נמצא את השחקן ששיחק פעמיים ברצף במשחק זה.

I	H	G	F	E	D	C	B	
○ ↑ 15	☆ ↑ 4	△ ↑ 1	♡ ↑ 2	♡ ↑ 1	○ → 6	☆ → 2	○ → 4	A
☆ ↑ 7	△ → 5	○ ↑ 4	○ ↑ 3	○ ↑ 4	○ ↑ 1	☆ → 3		B
○ → 3	○ → 1	☆ ↑ 5	○ ↑ 1	△ → 5	△ → 2			C

ניתן לראות ששחקן C משחק נגד שחקן A ב"כוכבי הפלא". משחקו הבא של שחקן C מתקיים מול שחקן B, ושוב מדובר ב"כוכבי הפלא".

המשחק הבא ששיחק שחקן C הוא נגד שחקן D, ומדובר ב"מגדלים באוויר" המסומן במשולש.

תשובה (3).

12. שואלים אותנו כמה נקודות צבר שחקן C אם ידוע שהשחקן המפסיד מאבד מספר נקודות השווה לזה שבו זכה המנצח.

נזכור כי כיוונו של החץ מסמל את המנצח במשחק, והמספר בכל תא מציין את הניקוד שקיבל המנצח, ואת הניקוד שאיבד השחקן המפסיד.

נסכום את הנקודות שקיבל ואיבד שחקן C:

A מול C. הפסיד ואיבד 2 נקודות.

B מול C. הפסיד ואיבד 3 נקודות.

C מול D. ניצח וצבר 2 נקודות.

C מול E. ניצח וצבר 5 נקודות.

C מול F. הפסיד ואיבד 1 נקודות.

C מול G. הפסיד ואיבד 5 נקודות.

C מול H. ניצח וצבר 1 נקודות.

C מול I. ניצח וצבר 3 נקודות.

לפיכך, בסוף הטורניר יהיו לשחקן C $(-2 - 3 + 2 + 5 - 1 - 5 + 1 + 3 = 0)$ נקודות.

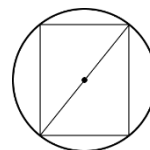
תשובה (2).

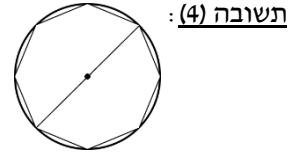
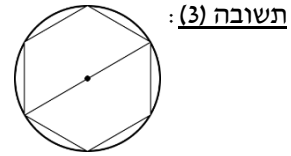
שאלות ובעיות (שאלות 13-20)

13. עלינו להשלים את המשפט "לא ייתכן שאחד מאלכסונו של _____ החסום במעגל הוא קוטר במעגל" בהתאם לתשובות המוצעות. נבדוק אותן:

תשובה (1): לא ייתכן שאחד מאלכסונו של טרפז שווה-שוקיים החסום במעגל הוא קוטר במעגל. זו התשובה הנכונה.

תשובה (2):





תשובה (1):

14. עלינו למצוא מה היה סכום האורכים של נחש ולטאה לפני שנה, אם ידוע כי באותו זמן הנחש היה ארוך פי 2 מהלטאה, וכי לאחר שכל אחד מהם התארך באותו מספר של ס"מ, הנחש היה ארוך מהלטאה ב-36 ס"מ.

נפתור את השאלה באמצעות בניית משוואה:

נניח שאורכה של הלטאה לפני שנה היה x ס"מ, ואורך הנחש לפני שנה היה $2x$ ס"מ. לאחר שאורך כל אחד מהם מתארך באותו מספר של ס"מ, נניח y ס"מ, יהיה אורך הלטאה $(x + y)$ ס"מ ואורך הנחש $(2x + y)$ ס"מ.

מכיוון שידוע שהנחש כעת ארוך מהלטאה ב-36 ס"מ, ניתן לבנות את המשוואה:
 $x + y + 36 = 2x + y$. נפשט אותה ונקבל: $36 = x$.

כלומר, אורכה של הלטאה לפני שנה היה 36 ס"מ, ואורך הנחש 72 ס"מ. סכום האורכים של הנחש והלטאה היה 108 ס"מ.

תשובה (2):

15. A ו-B הן אותיות המייצגות ספרות בין 1 ל-9. נתון שהמספר הדו-ספרתי AB קטן מפעמיים סכום ספרותיו, ושואלים אותנו מה היחס בין B ל-A.

דרך א': אלגברה

$$\begin{aligned}
 & \text{תחילה נכתוב את נתוני השאלה בצורה של אי-שוויון: } AB < 2(A + B) \\
 & \text{לאחר שניעזר בפירוק עשרוני ונחליף את AB ב- } 10A + B \text{ נקבל: } 10A + B < 2(A + B) \\
 & \text{כעת נבודד את A ו-B משני צדי האי-שוויון ונקבל: } 8A < B \\
 & \Rightarrow (10A + B < 2(A + B) \Rightarrow 10A + B < 2A + 2B)
 \end{aligned}$$

שתי הספרות היחידות המקיימות את אי-שוויון הן $A = 1$ ו- $B = 9$, ולכן $\frac{B}{A} = 9$.

דרך ב': בדיקת תשובות

תשובה (1): $\frac{B}{A} = 7$. במקרה זה $A = 1$ ו- $B = 7$. AB יהיה שווה ל-17 וסכום ספרותיו ל-8.

מכיוון ש-17 אינו קטן מפעמיים 8, זו אינה התשובה הנכונה והיא נפסלת.

תשובה (2): $\frac{B}{A} = \frac{3}{2}$. במקרה זה יכולות להיות כמה אפשרויות $A = 2$ ו- $B = 3$, $A = 4$ ו- $B = 6$.

או $A = 6$ ו- $B = 9$. במקרה הראשון AB יהיה שווה ל-23 וסכום ספרותיו ל-5, ומקרה השני AB יהיה שווה ל-46 וסכום ספרותיו ל-10, ובמקרה השלישי AB יהיה שווה ל-69 וסכום ספרותיו ל-15. באף אחד מהמקרים AB אינו קטן מפעמיים סכום ספרותיו, ולכן זו אינה התשובה הנכונה והיא נפסלת.

תשובה (3): $\frac{B}{A} = \frac{8}{3}$. במקרה זה $A = 3$ ו- $B = 8$. AB יהיה שווה ל-38 וסכום ספרותיו ל-11.

מכיוון ש-38 אינו קטן מפעמיים 11, זו אינה התשובה הנכונה והיא נפסלת.

פסלנו שלוש תשובות, ולכן התשובה הנותרת בהכרח נכונה. למען שלמות ההסבר נבדוק גם אותה:

תשובה (4): $\frac{B}{A} = 9$. במקרה זה $A = 1$ ו- $B = 9$. AB יהיה שווה ל-19 וסכום ספרותיו ל-10.

מכיוון ש-19 אכן קטן מפעמיים 10, זו התשובה הנכונה.

תשובה (4).

16. נתונים ארבעה ביטויים. שלושה מהם שווים באורכם, ועלינו למצוא את הביטוי הנותר. מבט על התשובות מלמד אותנו שיש להביא את כל הביטויים בתשובות לחזקות עם בסיס 2, וכך נוכל להשוות ביניהם.

תשובה (1): $2^9 = \left(\left(\frac{1}{4} \right)^{-5} \cdot \frac{1}{2} = 4^5 \cdot \frac{1}{2} = (2^2)^5 \cdot \frac{1}{2} = 2^{(2 \cdot 5)} \cdot \frac{1}{2} = 2^{10} \cdot \frac{1}{2} = 2^9 \right)$

תשובה (2): $2^9 = \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{-3} \cdot 2^6 = 2^3 \cdot 2^6 = 2^{(3+6)} = 2^9 \right)$

תשובה (3): $2^9 = \left(8^3 = (2^3)^3 = 2^{(3 \cdot 3)} = 2^9 \right)$

מצאנו שלוש תשובות זהות, ולכן התשובה הנותרת בהכרח נכונה. למען שלמות ההסבר נפשט גם אותה:

תשובה (4): $2^{12} = \left(4^6 = (2^2)^6 = 2^{(2 \cdot 6)} = 2^{12} \right)$

תשובה (4).

17. שואלים אותנו בכמה גפרורים שאורכם x ס"מ יש להשתמש כדי ליצור היקף של משולש שווה צלעות ששטחו $\sqrt{3}x^2$ סמ"ר.

נשתמש בנוסחה לחישוב שטח משולש שווה צלעות כדי לבנות את המשוואה:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}x^2 \quad (a \text{ הוא צלע המשולש}).$$

נחלץ את a מהמשוואה ונקבל שהוא שווה ל- $a = 2x$ אם $\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}x^2 \Rightarrow a^2 = 4 \cdot x^2 \Rightarrow a = 2x \right)$ אם

צלע המשולש שווה ל- $2x$ ס"מ, הרי שהיקף המשולש הוא $6x$ ס"מ. מכאן שאנו זקוקים ל-6 גפרורים שאורכם x ס"מ כדי ליצור את היקף המשולש.

תשובה (4).

18. נתונה פעולה חדשה $\$(n)$ שתוצאתה מספר בעל n ספרות שכולן 1, ומבקשים שנמצא בתשובות ביטוי השווה לביטוי $\$(n+1)$.

ניעזר בהצבת דוגמה מספרית כדי לפתור את השאלה. אם נציב $n = 2$ בביטוי $\$(n+1)$ נקבל שהוא שווה ל- $\$(3)$. כלומר ל-111.

נציב $n = 2$ בביטויים שבתשובות ונפסול תשובות בהן תוצאת הביטוי שונה מ-111.

תשובה (1): $111 = (10 \cdot \$(2) + 1 = 10 \cdot 11 + 1)$. מתאים, ולכן לא ניתן לפסול את התשובה בשלב זה.

תשובה (2): $1,000 = (10^{2+1} = 10^3)$. לא מתאים, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (3): $12 = (\$(2) + 1 = 11 + 1)$. לא מתאים, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (2): $10^{11} = (10^{\$(2)})$. לא מתאים, ולכן התשובה נפסלת.

פסלנו שלוש תשובות, ולפיכך התשובה הנותרת בהכרח נכונה.

תשובה (1).

19. נתון שבכנס מסוים התקיימו 4 הרצאות. אורי נכח ב-3 מהן, שיר נכחה ב-3 מהן, ודניאל נכח ב-2 מהן. עלינו למצוא בכמה הרצאות **לכל הפחות** נכחו שלושתם יחד.

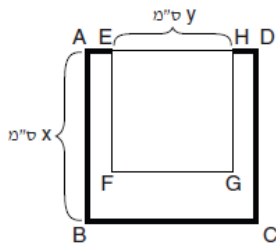
ניעזר בנוסחת החפיפה כדי לפתור את השאלה.

תחילה נחשב בכמה הרצאות לכל הפחות נכחו יחד אורי ושיר. מכיוון שהתקיימו 4 הרצאות, אורי נכח ב-3 מהן, ושיר נכחה ב-3 מהן, נקבע כי שניהם יחד נכחו **לכל הפחות** ב- $(3 + 3 - 4) = 2$ הרצאות.

מצאנו שאורי ושיר נכחו יחד ב-2 מ-4 ההרצאות בכנס. ייתכן ודניאל נכח ב-2 ההרצאות הנותרות, ובמצב זה שלושתם לא ינכחו יחד באף הרצאה.

תשובה (4).

20. נתון סרטוט ובו שני ריבועים שאורכי צלעותיהם x ס"מ ו- y ס"מ. אורך הקו המודגש בסרטוט שווה להיקף הריבוע EFGH, ומבקשים למצוא את היחס בין y ל- x .



נפתור את השאלה באמצעות שימוש באלגברה:

אם נחסר מהיקף הריבוע ABCD (שאורכו $4x$ ס"מ) את צלע EH (שאורכה y ס"מ) נקבל את אורך הקו המודגש בסרטוט. לפיכך הוא יהיה שווה ל- $(4x - y)$ ס"מ.

נתון שהיקף הריבוע EFGH (שאורכו $4y$ ס"מ) שווה לאורך הקו המודגש בסרטוט, ולכן ניתן לבנות משוואה לפיה: $4x - y = 4y$.

לאחר סידור המשוואה נקבל ש- $4x = 5y$ או לחלופין ש- $\frac{4}{5}x = y$.

$$\left(\frac{y}{x} = \frac{\frac{4}{5}x}{x} = \frac{4}{5} \right) \text{ כלומר, } \frac{y}{x} \text{ שווה ל-} \frac{4}{5}$$

תשובה (4).