

## הסברים

### שאלות ובעיות (שאלות 1-8)

- 1.** עלינו למצוא איזה מהמספרים שבתשובות יכול להיות כמות הסוכריות, אם ידוע שכשמחלקים את כמות הסוכריות ב-2, ב-3 או ב-4 נותרת שארית 1.
- נבדוק את התשובות המוצעות:
- תשובה (1):** חלוקה של המספר 7 ב-4 תותיר שארית 3 ולא 1, ולכן מספר זה לא יכול להיות כמות הסוכריות. התשובה נפסלת.
- תשובה (2):** חלוקה של המספר 11 ב-3 תותיר שארית 2 ולא 1, ולכן מספר זה לא יכול להיות כמות הסוכריות. התשובה נפסלת.
- תשובה (3):** חלוקה של המספר 13 ב-2, ב-3 או ב-4 תותיר שארית 1, ולכן מספר זה יכול להיות כמות הסוכריות. זו התשובה הנכונה.
- לצורך שלמות ההסבר נבדוק גם את תשובה (4):
- תשובה (4):** חלוקה של המספר 17 ב-3 תותיר שארית 2 ולא 1, ולכן מספר זה לא יכול להיות כמות הסוכריות. התשובה נפסלת.
- תשובה (3).**

- 2.** נתון ש-  $x = 2y$  ומבקשים שניביע את ערכו של הביטוי  $(x - y)^2$  באמצעות  $y$  או מספרים בלבד. כלומר, עלינו "להעלים" את  $x$  מהביטוי.

$$\text{נציב } x = 2y \text{ בביטוי ונקבל: } (x - y)^2 \leftarrow (2y - y)^2 \leftarrow (y)^2 \leftarrow y^2.$$

**תשובה (2).**

- 3.** עלינו למצוא את נפח הקובייה הרביעית במגדל, אם ידוע שנפח הקובייה התחתונה הוא 125 סמ"ק, ובכל פעם שמניחים קובייה נוספת למגדל המקצוע שלה קטן ב-1 ס"מ מהמקצוע של הקובייה הקודמת שהונחה.

כדי למצוא את נפח הקובייה הרביעית עלינו לדעת מה אורך המקצוע שלה.

ידוע שנפחה של הקובייה התחתונה הוא 125 סמ"ק, ולכן המקצוע שלה שווה ל-  $(\sqrt[3]{125} = 5)$  ס"מ.

המקצוע של הקובייה השנייה יהיה באורך  $4 (= 5 - 1)$  ס"מ, המקצוע של הקובייה השלישית יהיה

באורך  $3 (= 4 - 1)$  ס"מ, והמקצוע של הקובייה הרביעית יהיה באורך  $2 (= 3 - 1)$  ס"מ.

אם המקצוע של הקובייה הרביעית שווה ל-2 ס"מ, הרי שנפחה שווה ל-  $(2^3 = 8)$  סמ"ק.

**תשובה (1).**

4. נתבקשו להביע את הממוצע של ארבעה מספרים חיוביים ושונים זה מזה:  $x, y, z$  ו- $w$  באמצעות  $m$ , כאשר ידוע שהממוצע של  $x$  ו- $w$  שווה ל- $m$ , ושהממוצע של  $z$  ו- $y$  שווה ל- $5m$ .  
 לשם כך עלינו להביע את סכום ארבעת המספרים באמצעות  $m$ , ולאחר מכן לחלק את התוצאה שקיבלנו בכמות המספרים, כלומר ב-4.  
 הממוצע של  $x$  ו- $w$  שווה ל- $m$ , ולכן סכומם של  $x$  ו- $w$  שווה ל- $(2 \cdot m) = 2m$ .  
 הממוצע של  $z$  ו- $y$  שווה ל- $5m$ , ולכן סכומם של  $z$  ו- $y$  שווה ל- $(2 \cdot 5m) = 10m$ .  
 כלומר, סכום ארבעת המספרים שווה ל- $(2m + 10m) = 12m$ , ולכן הממוצע שלהם שווה ל-  

$$\left(\frac{12m}{4}\right) = 3m$$

תשובה (3).

5. נתבקשו למצוא את ערכו המספרי של הביטוי  $a^x$ , אם ידוע ש- $a^{2x} = 8$ .  
 נעזר בחוקי חזקות כדי לבודד את  $a^x$  מהמשוואה:  
 את הביטוי  $a^{2x}$  ניתן לפשט באופן הבא  $a^{2x} \Leftarrow a^{2 \cdot x} \Leftarrow (a^x)^2$ , ולפיכך את המשוואה הנתונה ניתן לכתוב גם כך:  $(a^x)^2 = 8$ .

כעת נוציא שורש משני צדי המשוואה ונקבל:  $a^x = \sqrt{8} \left( \Leftarrow \sqrt{(a^x)^2} = \sqrt{8} \right)$ .  
 $\sqrt{8}$  שווה ל- $2\sqrt{2} \left( \sqrt{8} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} \right)$ , ולכן תשובה (3) היא התשובה הנכונה.

תשובה (3).

6. נתונים שני מספרים אי-זוגיים ואחד זוגי. בתשובות מופיעים ארבעה ביטויים ועלינו למצוא איזה מהם **בהכרח אינו שלם**.  
 נפתור את השאלה באמצעות **הבנה אלגברית**. המקרה היחיד שבו נוכל לקבוע שביטוי **בהכרח אינו שלם** הוא כאשר המונה שלו יהיה אי-זוגי והמכנה שלו זוגי, ולכן נבדוק את התשובות המוצעות ונחפש את הביטוי שמקיים תנאי זה:  
**תשובה (1)**: במונה מופיע סכום של מספר זוגי ואי-זוגי, ולכן **המונה יהיה אי-זוגי**. **במכנה** מופיע מספר **אי-זוגי**. זה לא מתאים למקרה שאנחנו מחפשים ולכן התשובה נפסלת.  
**תשובה (2)**: במונה מופיע סכום של שלושה מספרים, שניים מהם אי-זוגיים והשלישי זוגי. לכן, **המונה יהיה זוגי**. **במכנה** מופיע מספר **זוגי**. זה לא מתאים למקרה שאנחנו מחפשים ולכן התשובה נפסלת.  
**תשובה (3)**: במונה מופיעה מכפלה של מספר אי-זוגי במספר זוגי, ולכן **המונה יהיה זוגי**. **במכנה** מופיע מספר **אי-זוגי**. זה לא מתאים למקרה שאנחנו מחפשים ולכן התשובה נפסלת.  
 פסלנו שלוש תשובות ולכן התשובה הנותרת בהכרח נכונה. לצורך שלמות ההסבר נבדוק גם אותה:  
**תשובה (4)**: תחילה נבדוק את המונה – מכפלה של שני מספרים אי-זוגיים היא בהכרח אי-זוגית, ולאחר שנוסיף מספר זוגי היא תיוותר אי-זוגית. כלומר, **המונה הוא אי-זוגי**. **במכנה** מופיע מספר **זוגי**. מתאים.  
**הערה**: ניתן לפתור את השאלה גם באמצעות הצבת דוגמה מספרית מתאימה לנתונים ופסילה של שלוש תשובות.  
**תשובה (4)**.

7. עלינו למצוא את שטחו של משולש FAD בהינתן ששטח המקבילית ABCD (לה יש צלע משותפת עם המשולש) שווה ל-8 סמ"ר.

נתון שמשולש FED חופף למשולש CEO, ולכן נסיק כי FE שווה ל-CE. כלומר, הגבהים של צלע המשולש AD ושל צלע המקבילית AD זהים. שטח מקבילית שווה למכפלת אורך אחת מצלעותיה בגובה לאותה הצלע, ושטח משולש שווה למחצית ממכפלת אורך אחת מצלעותיו בגובה לאותה צלע. מכיוון שלמקבילית ולמשולש יש בסיס זהה וגובה זהה, נקבע כי שטח המשולש שווה למחצית משטח המקבילית, כלומר ל-4  $\left(\frac{8}{2} = \right)$  סמ"ר.

תשובה (4).

8. עלינו למצוא מה גודל הזווית המרכזית הנשענת על הקשת שעברה מכונית הנוסעת במהירות של 60 קמ"ש, במסלול מעגלי שאורכו 80 ק"מ, בנסיעה של 10 דקות.

המכונית נוסעת 10 דקות, שהם  $\frac{1}{6}$  שעה, במהירות של 60 קמ"ש. המרחק שתעבור שווה ל-

$$10 \left( \frac{1}{6} \cdot 60 = \right) \text{ק"מ, והוא מהווה } \frac{1}{8} \left( \frac{10}{80} = \right) \text{ מאורך המסלול.}$$

החלק היחסי של הקשת שעברה המכונית מתוך כלל המסלול שווה לחלק היחסי של הזווית המרכזית עליה היא נשענת מתוך הזווית המרכזית כולה  $(360^\circ)$ , ולכן נוכל לקבוע כי הזווית המרכזית הנשענת על

$$\text{הקשת שעברה המכונית שווה ל- } 45^\circ \left( \frac{1}{8} \cdot 360^\circ = \right).$$

תשובה (2).

## הסקה מתרשים (שאלות 9-12)

9. נשאלנו איזה מבין השחקנים A, E, F או H סיים הכי הרבה משחקים בתיקו. **תשובה (1):** A. משתתף זה סיים בתיקו שני משחקים בתיקו בסיבוב הראשון עד שניצח, ואז סיים פעם נוספת בתיקו בסיבוב השני לפני שהפסיד במשחק הגומלין והודח. כלומר, הוא סיים שלושה משחקים בתיקו.

**תשובה (2):** E. משתתף זה ניצח את משחקו הראשון בסיבוב הראשון, סיים בתיקו את משחקו הראשון בסיבוב השני ואת משחק הגומלין ניצח, ואז שוב סיים בתיקו את משחקו הראשון בסיבוב השלישי ולאחר מכן הפסיד את משחק הגומלין. כלומר, הוא סיים שני משחקים בתיקו.

**תשובה (3):** F. משתתף זה סיים בתיקו את משחקו הראשון בסיבוב הראשון, ולאחר מכן הפסיד את משחק הגומלין והודח. כלומר, הוא סיים רק משחק אחד בתיקו.

**תשובה (4):** H. משתתף זה סיים בתיקו את משחקו הראשון בסיבוב הראשון, ולאחר מכן ניצח במשחק הגומלין, ניצח את משחקו הראשון בסיבוב השני, סיים בתיקו את משחקו הראשון בסיבוב השלישי, ולאחר מכן ניצח במשחק הגומלין וזכה בטורניר. כלומר, הוא סיים שני משחקים בתיקו.

נסכם: מבין השחקנים A, E, F או H, משתתף A סיים הכי הרבה משחקים בתיקו.

תשובה (1).

10. נשאלנו כמה זמן נמשך המשחק שבו הפסיד שחקן E.

ניתן לראות כי שחקן E הפסיד במשחק הגמר לאחר שסיים בתיקו את משחקו הראשון בסיבוב זה. המשחק שבו הפסיד מסומן באמצעות ריבוע לבן ללא נקודות, ולכן נסיק כי משחק זה הסתיים בפחות משעה.

תשובה (1).

11.

שואלים אותנו מי מבין השחקנים שבתשובות יכול להיות הזוכה בפרס הניחומים, כאשר ידוע שהזוכה בפרס הניחומים הודח בשלב הראשון של התחרות על ידי שחקן שהעפיל לשלב השלישי של התחרות. נבדוק את התשובות המוצעות:

**תשובה (1):** משתתף C. משתתף C הודח בסיבוב הראשון לאחר שסיים בשני תוצאות תיקו והפסיד את המשחק השלישי. המשתתף היחיד שסיים בשני תוצאות תיקו בסיבוב הראשון עד שניצח ועבר שלב הוא משתתף A, ולכן הוא בהכרח המשתתף נגדו התחרה משתתף C בסיבוב הראשון. מכיוון שמשתתף A הודח כבר בסיבוב השני ולא העפיל לסיבוב השלישי ניתן לפסול את התשובה.

**תשובה (2):** משתתף D. משתתף D הודח בסיבוב הראשון לאחר הפסד במשחקו הראשון. המשחק נערך מעל שלוש שעות (מסומן בשלוש נקודות על הריבוע המסמל את המשחק). המשתתף היחיד ששיחק רק משחק אחד של מעל שלוש שעות בסיבוב הראשון וניצח בו הוא משתתף G, ולכן הוא בהכרח המשתתף נגדו התחרה משתתף D בסיבוב הראשון. מכיוון שמשתתף G הודח כבר בסיבוב השני ולא העפיל לסיבוב השלישי ניתן לפסול את התשובה.

**תשובה (3):** משתתף F. משתתף F הודח בסיבוב הראשון לאחר שסיים משחק בתיקו והפסיד את המשחק השני. המשתתף היחיד שסיים בתוצאות תיקו אחת בסיבוב הראשון עד שניצח ועבר שלב הוא משתתף H, ולכן הוא בהכרח המשתתף נגדו התחרה משתתף F בסיבוב הראשון. מכיוון שמשתתף H העפיל לסיבוב השלישי בתחרות, נסיק כי משתתף F **יכול להיות** הזוכה בפרס הניחומים. אין צורך לבדוק תשובות נוספות.

**תשובה (3).**

12.

עלינו למצוא איזה מבין השחקנים שבתשובות המוצעות סיים לשחק **הכי מוקדם** בשלב הראשון של הטורניר. כלומר, עלינו לחשב בעבור כל אחד מהשחקנים כמה זמן הוא שיחק בשלב הראשון

**תשובה (1):** משתתף D. שיחק משחק אחד בלבד בשלב הראשון שארך יותר משלוש שעות.

**תשובה (2):** משתתף E. שיחק משחק אחד בלבד בשלב הראשון שארך יותר משעתיים ופחות משלוש שעות.

**תשובה (3):** משתתף F. שיחק שני משחקים בשלב הראשון, הראשון ארך יותר משעה ופחות משעתיים והשני ארך פחות משעה.

ייתכן שמשתתף E שיחק במשך שעתיים ו-1 דקה את משחקו היחיד בסיבוב, ומשתתף F שיחק שעה ו-59 דקות את משחקו הראשון ו-59 דקות את משחקו השני בסיבוב. כלומר, משתתף F שיחק במצטבר שעתיים ו-58 דקות בסיבוב הראשון. במקרה זה משתתף E יהיה המשתתף ששיחק הכי מעט זמן בסיבוב הראשון.

מנגד, ייתכן שמשתתף E שיחק במשך שעתיים ו-59 דקות את משחקו היחיד בסיבוב, ומשתתף F שיחק שעה ו-1 דקה את משחקו הראשון ו-1 דקה את משחקו השני בסיבוב. כלומר, משתתף F שיחק במצטבר שעה ו-2 דקות בסיבוב הראשון. במקרה זה משתתף F יהיה המשתתף ששיחק הכי מעט זמן בסיבוב הראשון. מכאן שלא ניתן לקבוע איזה משתתף סיים לשחק **הכי מוקדם** בשלב הראשון של הטורניר.

**תשובה (4).**

## שאלות ובעיות (שאלות 13-20)

**13.** עלינו למצוא איזה אחוז מהכדורים בכד, **לכל היותר**, הם כחולים. לשם כך עלינו לדרוש שיהיו בכד **כמה שפחות** כדורים בצבעים שאינם כחול.

נתון ש-50% מהכדורים בכד הם ירוקים, ו-25% מהכדורים בכד הם אדומים. כמו כן, נתון ש-20% מהכדורים שאינם ירוקים הם צהובים. נחשב איזה אחוז מהכדורים בכד הם צהובים. אם 50% מהכדורים בכד הם ירוקים, הרי ש-50% = (100% - 50%) מהכדורים בכד אינם ירוקים. 20% מהכדורים שאינם ירוקים הם צהובים, ולכן נסיק כי הכדורים הצהובים מהווים

$$10\% = \left( 20\% \cdot 50\% = \frac{1}{5} \cdot 50\% \right) \text{ מכלל הכדורים בכד.}$$

על מנת שאחוז הכדורים הכחולים בכד יהיה מקסימלי נניח כי אין בכד כדורים בצבעים נוספים מלבד ירוק, אדום, צהוב וכחול. במקרה כזה נקבל שאחוז הכדורים הכחולים מתוך סך הכדורים בכד שווה ל- $(100\% - 50\% - 25\% - 10\%) = 15\%$

**תשובה (2).**

**14.** נתון מלבן שהיקפו 16 ס"מ, וסביבו בונים מלבן נוסף שכל אחת מצלעותיו רחוקה ב-1 ס"מ מהצלע המתאימה במלבן. עלינו למצוא את אורכו של המלבן הגדול.

ניתן לראות כי כל אחת מצלעותיו של המלבן הגדול ארוכה ב-2 ס"מ מהצלע המתאימה לה במלבן הקטן. לכן היקפו של המלבן הגדול יהיה גדול ב- $(4 \cdot 2) = 8$  ס"מ מהיקף המלבן הקטן. כלומר, היקף המלבן הגדול יהיה שווה ל- $24 (= 16 + 8)$  ס"מ.

**תשובה (3).**

**15.** נתון כי המספר הדו-ספרתי AB גדול פי 9 מסכום ספרותיו, ושואלים אותנו כמה ערכים שונים יכולים להיות לו.

$$AB = 9 \cdot (A + B)$$

את המספר הדו-ספרתי AB ניתן להציג באמצעות פירוק עשרוני גם כ- $10A + B$ , ולכן את המשוואה שבנינו ניתן להציג גם כך:  $10A + B = 9A + 9B$ . לאחר העברת אגפים נקבל:  $A = 8 \cdot B$ , ומכאן ש-A גדול מ-B פי 8.

האפשרות היחידה המתאימה שבה A גדול מ-B פי 8 היא כאשר A שווה ל-1 ו-B שווה ל-8, ולכן AB בהכרח שווה ל-18.

לפיכך, יש רק **ערך אחד** אפשרי בעבור AB.

**תשובה (1).**

**16.** דרור עבד 100 שעות בחודש, והשתכר 10 דולרים בשעה. מכאן שהרוויח עבור עבודתו באותו החודש 1,000 דולרים. לאחר תשלום מס של 4% הוא נותר עם  $\left( 1,000 - \frac{4}{100} \cdot 1,000 = 1,000 - 40 = 960 \right)$  דולרים.

עלינו למצוא כמה שעות צריך לעבוד דרור בחודש שבו השתכר 20 דולרים לשעה, ושיולם מס של 20% ממשכורתו, כדי להישאר עם רווח זהה. כלומר, עם 960 דולרים. נבדוק את התשובות המוצעות, ונראה כי תשובה (3) מתאימה.

**תשובה (3):** 60 שעות. אם דרור עבד במשך 60 שעות, הרי שהרוויח  $1,200 (= 20 \cdot 60)$  דולרים. לאחר תשלום מס של 20%, השווים ל-240  $\left( \frac{20}{100} \cdot 1,200 = \frac{1}{5} \cdot 1,200 = 240 \right)$  שקלים, הוא יישאר עם  $960 (= 1,200 - 240)$  דולרים. מתאים.

**תשובה (3).**

**17.** נתון שערך מטפס בכל דקה 10 מדרגות או יורד מדרגה אחת, ושואלים אותנו איזה שהמספרים שבתשובות **יכול להיות** מספר הדקות שערך חזר על התהליך אם ידוע כי הוא נמצא כעת על מדרגה צמודה למדרגה ממנה התחיל.

נבדוק את התשובות המוצעות באמצעות ניסוי וטעייה:

**תשובה (4):** 11 דקות. אם בדקה הראשונה טיפס ערך 10 מדרגות, ובשאר הדקות הוא ירד בכל פעם מדרגה אחת, כלומר ירד 10 מדרגות בסך הכול, הרי שיחזור למדרגה ממנה התחיל.

**תשובה (3):** 10 דקות. אם בדקה הראשונה טיפס ערך 10 מדרגות, ובשאר הדקות הוא ירד בכל פעם מדרגה אחת, כלומר ירד 9 מדרגות בסך הכול, הרי שיהיה **מדרגה אחת מעל זו שהתחיל ממנה**. מתאים.

**תשובה (3).**

**18.** עלינו למצוא את גודלו של השטח האפור בסרטוט הנתון. מכיוון שמדובר בשטח של צורה לא מוכרת, נאלץ למצוא אותו דרך חיבור או חיסור שטחים של צורות מוכרות.

תחילה נעביר בניית עזר רדיוסים ממרכז במעגל אל נקודות החיתוך שלו עם ציר ה-y ועם ציר ה-x, ונקבל שני משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים.

כעת ניתן לראות כי על מנת למצוא את השטח האפור יש לחסר ממחצית משטח המעגל את שטחי המשולשים שנוצרו. שטח המעגל שווה ל- $2\pi (= \pi (\sqrt{2})^2)$ , ולכן מחציתו שווה ל- $\pi$  סמ"ר.

שטח כל משולש שווה למחצית ממכפלת הניצבים שלו, כלומר ל- $1 \left( \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 1 \right)$  סמ"ר, ולכן שטח שני המשולשים שווה ל-2 סמ"ר.

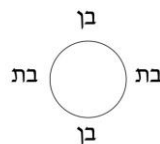
נחסר משטח מחצית מהמעגל את סכום שטחי המשולשים ונקבל שהשטח האפור שווה ל- $(\pi - 2)$  סמ"ר.

**תשובה (2).**

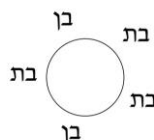
**19.** נתון ש-100 בנים ו-101 בנות עומדים במעגל ומחזיקים ידיים, ושואלים כמה בנות **לכל היותר** מחזיקות ידיים עם שני בנים.

ננסה לעבוד עם מספרים קטנים יותר כדי להבין את החוקיות.

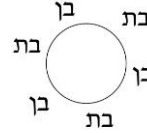
במידה והייתה כמות זהה של בנים ובנות, נניח שני בנים ושתי בנות, יכולנו לסדר אותם כך שכל אחת מהבנות תאחז ידיים לשני בנים. הנה כך:



לא משנה היכן נוסף בת נוספת, נניח כך:



נקבל ששתיים מהבנות אינן מחזיקות ידיים עם שני בנים.  
 במידה והיו שלושה בנים ושלוש בנות, יכולנו לסדר אותם כך שכל אחת מהבנות תאחז ידיים לשני בנים.  
 הנה כך:



גם במקרה הזה, לא משנה להיכן נצרך בת נוספת, נניח כך:



נקבל ששתיים מהבנות אינן מחזיקות ידיים עם שני בנים.  
 אפשר לחזור שוב על התהליך עם מספרים נוספים, אך בכל מקרה תמיד נקבל שכאשר מספר הבנות גדול  
 ב-1 ממספר הבנים, שתיים מהבנות אינן מחזיקות ידיים עם שני בנים.  
 לכן, אם יש 100 בנים ו-101 בנות, לכל היותר  $99 (= 101 - 2)$  בנות יכולות לאחוז ידיים לשני בנים.

**תשובה (2).**

**20.** נשאלנו כמה מספרים בין 10 ל-12 מכפלתם ב-3 היא מספר שלם.  
 מהתשובות עולה כי יש מעט מאוד מספרים המקיימים את הנתונים, ולכן נפרוט אותם באופן שיטתי.

המספרים הם:  $10\frac{1}{3}$ ,  $10\frac{2}{3}$ ,  $11$ ,  $11\frac{1}{3}$  ו-  $11\frac{2}{3}$ . כלומר, 5 מספרים בסך הכול.

**תשובה (1).**