הסברים

הסקה מתרשים (שאלות 1-4)

1. נשאלנו באיזו עונה היה מספר התיירים שביקרו במדינה הקטן ביותר, ובאיזו עונה מספר התיירים שביקרו במדינה היה הגדול ביותר.

נחשוב מה אנחנו מחפשים לראות בתרשים. ככל שמרחק של נקודה מסוימת ממרכז המעגל גדול יותר, כך כמות התיירים שביקרו באותו מחוז גדול יותר. לכן, כדי למצוא באיזו עונה היה מספר התיירים שביקרו במדינה היה הקטן ביותר, עלינו לחפש עונה שבה מרחקן של הנקודות ממרכז המעגל הוא הקטן ביותר – במקרה זה עונת החורף. באותו אופן, כדי למצוא באיזו עונה היה מספר התיירים שביקרו במדינה היה הגדול ביותר, עלינו לחפש עונה שבה מרחקן של הנקודות ממרכז המעגל הוא הגדול ביותר – במקרה זה עונת הקיץ.

הערה: ניתן לבצע חישוב של מספר התיירים שביקרו במדינה בכל אחת מעונות השנה (לסכום את כמות התיירים שביקרו בכל מחוז) ולבסוף להשוות בין הסכומים שהתקבלו, אך חישוב זה יגזול מאיתנו זמן יקר.

תשובה (4).

---

2. חילקו את מדינה לארבעה אזורים, כאשר כל אזור מורכב משלושה מחוזות, ושואלים אותנו באיזה מארבעת האזורים ביקרו יותר תיירים בעונת האביב.

במחוז צפון ביקרו בסך הכול $2,550\ (=900+850+800)$ תיירים בעונת האביב.

במחוז דרום ביקרו בסך הכול $2,450\ (=950+800+700)$ תיירים בעונת האביב.

במחוז מזרח ביקרו בסך הכול $2,700\ (=950+850+900)$ תיירים בעונת האביב.

במחוז מערב ביקרו בסך הכול $2,500\ (=900+800+800)$ תיירים בעונת האביב.

מכאן שמספר התיירים הגדול ביותר שביקרו במדינה במהלך האביב הגיעו למחוז מזרח.

תשובה (1).

---

3. בתשובות מופיעים ארבעה תרשימים, ושואלים אותנו מי מהם יכול לייצג עונה שבה מספר התיירים שביקרו בכל מחוז, מלבד מחוז צפון-מערב, היה נמוך מהיעד הרצוי אחד מהם.

נזכור כי היעד הרצוי הוא 800 תיירים לפחות בכל עונה, בכל אחד מהמחוזות. לכן, אנו מחפשים תרשים בו מלבד צפון מערב, כמות התיירים בכל מחוז קטנה מ-800. זה קורה בתרשים המופיע בתשובה (4).

תשובה (4).

---

4. נתון שמדינה החליטה לשנות את היעד הרצוי ל-900 תיירים לכל הפחות , ושואלים אותנו כמה מהמחוזות שעמדו ביעד המקורי של 800 תיירים, **אינם** עומדים ביעד החדש.

נחשוב מה אנחנו מחפשים לראות בתרשים. מחוז שעמד ביעד המקורי ולא עמד ביעד החדש הוא מחוז שמספר התיירים בו שווה או גדול מ-800 אך קטן מ-900. נבדוק כמה מהנקודות נמצאות על הטבעת המייצגת 800 תיירים או לחלופין נמצאות בין הטבעות שמייצגת 800 תיירים לבין זו המייצגת 900 תיירים. הנקודות הרלוונטיות הן של המחוזות: צפון, צפון-מערב, דרום-מערב ומזרח.

תשובה (4).

שאלות ובעיות (שאלות 5-20)

5. נתון כי ערן מאזין בכל שבוע ל-5 שעות של מוזיקה קלאסית ולשעתיים של מוזיקת רוק, ושואלים אותנו לכמה **שעות יומיות בממוצע** הוא מאזין למוזיקה קלאסית, ולכמה **שעות יומיות בממוצע** הוא מאזין למוזיקת רוק. נחשב זאת:

ערן מאזין בכל 7 ימים ל-5 שעות של מוזיקה קלאסית. נחלק את מספר השעות השבועיות שבהן הוא מאזין למוזיקה קלאסית במספר הימים שיש בכל שבוע ונגלה כי ממוצע השעות היומיות שבהן הוא מאזין למוזיקה קלאסית הוא: $\frac{5}{7}$.

באותו אופן, ערן מאזין בכל 7 ימים ל-2 שעות של מוזיקת רוק. נחלק את מספר השעות השבועיות השבועיות שבהן הוא מאזין למוזיקת רוק במספר הימים שיש בכל שבוע ונגלה כי ממוצע השעות היומיות שבהן הוא מאזין למוזיקת רוק הוא: $\frac{2}{7}$.

תשובה (1).

---

6. נתון טרפז ABCD ובו משולש שווה שוקיים ABC שזווית הראש שלו שווה ל- 50°. מבקשים מאיתנו למצוא את אחת מזוויות הטרפז.

ננסה למצוא את שאר זוויות הטרפז, ולאחר מכן נבנה משוואה לפיה סכום זוויותו שווה ל- 360° ממנה נחלץ את הזווית הרצויה.

נתחיל ממשולש ABC. המשולש הוא שווה שוקיים וזווית הראש שלו שווה ל- 50°. מכאן שכל אחת מזוויות הבסיס שלו (זווית $\measuredangle BAC$ וזווית $\measuredangle BCA$) שווה ל- $65^\circ \left(= \frac{180^\circ - 50^\circ}{2}\right)$.

זוויות $\measuredangle BCA$ ו- $\measuredangle CAD$ הן זוויות מתחלפות ולכן שוות זו לזו. כלומר, $\measuredangle CAD$ שווה גם היא ל- 65°. מצאנו את כל זוויות הטרפז למעט זווית α.

כעת נבנה את המשוואה ונחלץ את α. $50^\circ + 65^\circ + 40^\circ + 65^\circ + 65^\circ + \alpha = 360^\circ \Leftarrow \alpha = 75^\circ$

תשובה (2).

---

7. נתונה משוואה בשני נעלמים: $y = \frac{x!}{(x-1)!}$, ושואלים אותנו איזו טענה נכונה בהכרח לגבי y.

<u>דרך א'</u>: אלגברה

נפשט את הביטוי שבצד ימין של המשוואה באופן הבא: $\frac{x!}{(x-1)!} = x$. נקבל ש- $y = x$.

<u>דרך ב'</u>: הצבת דוגמה מספרית

שואלים איזו טענה נכונה בעבור y. נציב מהראש x כלשהו ונקבל ערך מסוים בעבור y. בעזרת ערכו של y ננסה לפסול שלוש תשובות.

נניח ש-x שווה ל-2. במקרה זה y יהיה שווה ל- $2 \left(= \frac{2}{1} = \frac{2!}{1!} = y\right)$. תשובות (1) ו-(3) נפסלות.

נותרנו עם שתי תשובות ולכן נציב פעם נוספת, הפעם x שווה ל-3. במקרה זה נקבל ש-y שווה ל- $3 \left(= \frac{6}{2} = \frac{3!}{2!} = y\right)$. גם תשובה (2) נפסלת, ולכן תשובה (4) היא התשובה הנכונה.

תשובה (4).

---

8. נתון ש-ABCF הוא דלתון. כלומר, שאורך הצלע AB שווה לאורך הצלע AF, ושאורך הצלע BC שווה לאורך הצלע CF. שואלים אותנו על היחס בין היקף מחומש ABCDE לבין היקף מחומש AFCDE.

ניתן לראות כי לשני המחומשים יש 3 צלעות משותפות: AE, ED ו-DC. שתי הצלעות הנותרות במחומש ABCDE הן AB ו-BC, ושתי הצלעות הנותרות במחומש AFCDE הן AF ו-FC.

ראינו כי אורך הצלע AB שווה לאורך הצלע AF, ושאורך הצלע BC שווה לאורך הצלע CF, ומכאן נסיק כי למחומשים היקף זהה. אם כן, היחס בין ההיקפים יהיה שווה ל-1.

תשובה (2).

---

9. נתון כי איתי מרוויח 7,000 שקלים ובועז 4,000 שקלים, ומבקשים מאתנו לבדוק באיזה מן המקרים בתשובות ישתנה היחס בין המשכורות של השניים.

הערה: נזכור כי היחס יישמר כל עוד נכפול או נחלק את המשכורות של השניים באותו ערך.

ניגש לבדוק את התשובות:

<u>תשובה (1)</u>**:** נחסר $\frac{1}{3}$ ממשכורתו של כל אחד מהם. כל אחד מהם יישאר עם $\frac{2}{3}$ ממשכורתו. אנו בעצם כופלים את שתי המשכורות באותו ערך $\left(\frac{2}{3}\right)$ ולכן היחס יישמר.

<u>תשובה (2)</u>**:** לא ניתן להוסיף או לחסר ערך זהה משתי המשכורות מבלי לשנות את היחס ביניהן. לכן, אם **נוסיף** 3,000 שקלים למשכורתו של כל אחד מהם, היחס בין המשכורות ישתנה. זו התשובה הנכונה. הערה: ניתן לחשב גם באופן מלא ולראות שהיחס המקורי בין המשכורות הוא 4:7 והיחס אחרי השינוי יהיה 7:10.

תשובה (2).

---

10. נתונה פעולה חדשה לפיה: $\$(x)=\frac{x+|x|}{2}$, ושואלים אותנו מהו ערכו של הביטוי $\$(-|x|)$.

נפתור באמצעות הצבת דוגמה מספרית:

נציב בביטוי מספר נח, לדוגמה $x=1$, ונקבל $\$(-1)$ $\left(\$(-|1|)\right)=\$(-1)$.

כעת נחשב את ערכו של הביטוי בהתאם לפעולה המומצאת הנתונה:

אנחנו רואים כי יש להחליף את x ב- (-1). נקבל: $\left(\frac{-1+|-1|}{2}=\frac{-1+1}{2}=\frac{0}{2}=\right)0$. כלומר, כאשר $x=1$ הביטוי צריך להיות שווה ל-0.

כעת נציב $x=1$ גם בתשובות, ונפסול תשובות שונות מ-**0**. תשובות (2), (3) ו-(4) נפסלות, ולכן התשובה הנותרת בהכרח נכונה.

תשובה (1).

---

11. נתון מעגל ששטחו A סמ"ר ובתוכו חסום ריבוע, ומבקשים מאתנו להביע את שטח הריבוע באמצעות A.

נעביר בניית עזר – רדיוסים ממרכז המעגל אל קודקודי הריבוע ונקבל ישרים המהווים קוטר במעגל, וכן אלכסון בריבוע.

נתון ששטח המעגל הוא A סמ"ר. נשתמש בנוסחה לפיה השטח שווה ל- πr^2, ונחלץ את רדיוס המעגל:

$A=\pi r^2 \Leftarrow r^2=\frac{A}{\pi} \Leftarrow r=\sqrt{\frac{A}{\pi}}$. מכאן שקוטר המעגל השווה גם לאלכסון הריבוע שווה ל- $2\cdot\sqrt{\frac{A}{\pi}}$.

כעת נותר לנו לחשב את שטח הריבוע. אנו יודעים ששטח ריבוע שווה למחצית ממכפלת האלכסונים

שלו. מכאן ששטח הריבוע החסום שווה ל- $\frac{2\cdot\sqrt{\frac{A}{\pi}}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{A}{\pi}}}{2}$.

נפשט את הביטוי שקיבלנו ונקבל: $\frac{2A}{\pi}=\left(\frac{2\cdot\sqrt{\frac{A}{\pi}}\cdot\cancel{2}\cdot\sqrt{\frac{A}{\pi}}}{\cancel{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{A}{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{A}{\pi}}=2\cdot\frac{A}{\pi}=\right)$

תשובה (3).

---

12. נשאלנו איזה מהמספרים שבתשובות ניתן להציג כמכפלה של **שני** מספרים ראשוניים.

נפרק כל אחד מהמספרים שבתשובות למכפלת גורמים ראשוניים, עד שנמצא מספר שניתן להציגו כמכפלה של שני גורמים ראשוניים:

<u>תשובה (1)</u>: $66=2\cdot 33=2\cdot 3\cdot 11$. את המספר 66 ניתן להציג כמכפלה של **שלושה** גורמים ראשוניים, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: $78=2\cdot 39=2\cdot 3\cdot 13$. את המספר 78 ניתן להציג כמכפלה של **שלושה** גורמים ראשוניים, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (1)</u>: $85=5\cdot 17$. את המספר 85 ניתן להציג כמכפלה של **שני** גורמים ראשוניים, ולכן זו התשובה הנכונה.

<u>לצורך שלמות ההסבר נבדוק גם את תשובה (4)</u>:

<u>תשובה (1)</u>: $105=5\cdot 21=5\cdot 3\cdot 7$. את המספר 105 ניתן להציג כמכפלה של **שלושה** גורמים ראשוניים, ולכן התשובה נפסלת

תשובה (3).

---

13. נתון ש-x הוא מספר שלם, חיובי ואי-זוגי. כמו כן, נתון כי שארית החלוקה שלו ב-3 היא 2. שואלים אותנו מה תהיה שארית החלוקה של x ב-6.

נציב דוגמה מספרית במקום x ובעזרתה נפתור את השאלה. x הוא מספר אי זוגי, ושארית החלוקה שלו ב-3 היא 2. המספר 5 מקיים נתונים אלו, ולכן ניתן להציבו במקום x.

שארית החלוקה של 5 ב-6 היא 5, ולכן תשובות (1), (2) ו-(4) נפסלות. התשובה הנותרת היא התשובה הנכונה.

תשובה (3).

---

14. נתון ריבוע שאורך צלעו 15 ס״מ, ובתוכו מצוירים 5 ריבועים כהים שווים בשטחם, כלומר חופפים.
נחלק את הריבוע לריבועים קטנים, זהים לריבועים הכהים הנתונים, ונראה כי צלע הריבוע הגדול מורכבת מצלעות של 5 ריבועים קטנים. כלומר, כל צלע של הריבוע הקטן שווה ל-3 ס״מ.

כמו כן, נראה כי הישר OP הוא חלק ממשולש ישר זווית ושווה שוקיים שכל אחד מהניצבים שלו שווה לאורך שלוש צלעות של ריבוע קטן, כלומר ל-9 ס״מ.

נותר לנו להשתמש ביחס הצלעות במשולש ישר זווית ושווה שוקיים כדי למצוא את OP. על מנת לעבור מניצב ליתר יש לכפול את אורך הניצב פי $\sqrt{2}$, ולכן אורך היתר במשולש (הישר OP) שווה ל- $9\sqrt{2}$.

תשובה (4).

.15 נתון כי מכונה לייצור פופקורן מופעלת 4 שעות בכל יממה, ושבשל תקלה, היא לא פעלה במשך 10 יממות. מכאן שהמכונה "הפסידה" 40 שעות עבודה במהלך הימים בהם הייתה תקולה.
לאחר מכן נתון שלאחר שתוקנה הופעלה המכונה **ללא הפסקה** במשך מספר יממות, עד שכמות הפופקורן הכוללת שהיא ייצרה הייתה שווה לכמות הכוללת שהייתה מייצרת עד אותו הזמן לולא התקלקלה. שואלים אותנו כמה יממות המכונה עבדה ברצף.

נבדוק את התשובות המוצעות:

<u>תשובה (1)</u>: ביממה אחת יש 24 שעות. זה לא מספיק כדי להשלים את 40 השעות אותה הפסידה בזמן שהייתה תקולה. התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: ב-2 יממות יש 48 שעות. במהלך שתי יממות המכונה אמורה לעבוד במשך 8 $\left(=2\cdot 4\right)$ שעות. 40 השעות הנוספות שבהן המכונה עבדה הן בדיוק אותן שעות שהייתה אמורה להשלים מהתקופה שבה הייתה תקולה. זו התשובה הנכונה.

תשובה (1).

.16 נתונה משוואה ובה שני נעלמים המייצגים מספרים שלמים וחיוביים, ושואלים אותנו איזו מהטענות שבתשובות נכונה בהכרח לפיה.

ראשית עלינו לפשט את המשוואה בטרם ניגש לבדוק את הטענות שבתשובות.

נצמצם את השברים כמיטב יכולתנו: $\frac{{}^{1}\cancel{2}}{{}_{1}\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{4}_{2}}\cdot\frac{a}{b}=1\Rightarrow\frac{5}{2}\cdot\frac{a}{b}=1$

נכפול ב-2b ונקבל: $\frac{5}{2}\cdot\frac{a}{b}=1\Rightarrow 5a=2b$.

מכאן נפתור את השאלה באמצעות **הצבת דוגמה מספרית מהראש**.

ראינו כי $5a=2b$, ומכאן שהיחס בין a ל-b הוא 2:5.
$a=2$ ו- $b=5$ וניגש לפסול תשובות. בשלב זה רק תשובה (1) נפסלת ולכן נאלץ להציב פעם נוספת.
כעת נציב זוג מספרים נוסף שמקיים את היחס, לדוגמה $a=4$ ו- $b=10$. תשובות (2) ו-(4) נפסלות.
התשובה הנותרת היא בהכרח התשובה הנכונה.
הערה: ראינו שזוג המספרים השלמים **המינימליים** המקיים את היחס הוא $a=2$ ו- $b=5$. ההפרש ביניהם שווה ל-3. בכל פעם שנרחיב את היחס ונציב מספרים גדולים יותר במקום a ו-b ההפרש בהכרח יגדל. זהו בדיוק אי-השוויון המופיע בתשובה (3).

תשובה (3).

.17 לפנינו שאלת אחוזים. נתון שבמחקר שנערך נבדק משקלו של גוזל והתברר כי הוא עלה בכל שבוע ב-100% ביחס למשקלו בתחילת אותו שבוע. שואלים אותנו בכמה אחוזים הוא עלה מתחילת המחקר ועד לתום שלושה שבועות.

כיוון שמדובר בשאלת אחוזים עלינו לוודא כי אנו מבינים מי השלם בטרם נתחיל לפתור. במקרה זה מדובר כמובן במשקלו של הגוזל בתחילת המחקר. כיוון שבשאלה אין נתונים ממשיים, אנחנו יכולים להציב מהראש איזה משקל התחלתי שנרצה – לדוגמה 100.

כעת נחשב את משקלו של הגוזל בתום 3 שבועות.
בשבוע הראשון עולה משקלו של הגוזל ב-100% ביחס למשקלו ההתחלתי. משקלו החדש יהיה 200.
בשבוע השני עולה משקלו של הגוזל ב-100% ביחס למשקלו בתחילת אותו שבוע (200). משקלו החדש יהיה 400. בשבוע השלישי עולה משקלו של הגוזל ב-100% ביחס למשקלו בתחילת אותו שבוע (400). משקלו החדש יהיה 800.

אם כן משקלו של הגוזל עלה מ-100 ל-800 תוך שלושה שבועות. גידול של 700%.

תשובה (4).

.18 לפנינו שאלת צירופים. יש שני סוגים של סיסמאות שניתן להרכיב מהספרות 1 ו-2: סיסמאות באורך 3 תווים או סיסמאות באורך 6 תווים. עלינו למצוא כמה סיסמאות שונות בסך הכול ניתן להרכיב.

נחשב בנפרד כמה סיסמאות באורך 3 תווים קיימות, וכמה סיסמאות באורך 6 תווים קיימות, ולבסוף נחבר את התוצאות שקיבלנו.

לכל תו יש 2 אפשריות (1 ו-2). לכן מספר האפשרויות לסיסמה בעלת 3 תווים הוא $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
באותו אופן, מספר האפשרויות לסיסמה בעלת 6 תווים הוא: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$.

כלומר, יש בסך הכול $8 + 64 = 72$ אפשרויות לסיסמאות שונות שניתן להרכיב.

תשובה (4).

.19 נתון ביטוי $\left(\sqrt{55}+1\right)^2$ ומבקשם מאתנו למקם אותו בין שני מספרים. כלומר, לעשות לו הערכת סדר גודל.

ראשית, נפשט את הביטוי באמצעות נוסחת הכפל המקוצר. נקבל:
$$\left(\sqrt{55}+1\right)^2 = 55 + 2\sqrt{55} + 1 = 56 + 2\sqrt{55}$$

כעת נבצע הערכת סדר גודל ל- $\sqrt{55}$ ונציב אותו בביטוי שקיבלנו. נחפש שני שורשים קרובים שאנחנו יודעים את ערכם, אחד גדול ממנו ואחד קטן ממנו. אנחנו יודעים ש- $\sqrt{55}$ גדול מ- $\sqrt{49}$, כלומר מ-7, וקטן מ- $\sqrt{64}$, כלומר מ-8. מכאן ש- $\sqrt{55}$ נמצא בין 7 ל-8.

אם נציב בביטוי $\sqrt{55} = 7$ נקבל שהוא שווה ל- $56 + 2 \cdot 7 = 70$, ואם נציב בביטוי $\sqrt{55} = 8$ נקבל $56 + 2 \cdot 8 = 72$. מכאן שהביטוי נמצא בין 70 ל-72.

תשובה (3).

.20 חיברו שלושה קדקודים של קובייה כך שנוצר משולש, ושואלים אותנו על אחת מזוויותיו. מבט על התשובות מלמד אותנו שייתכן והמשולש שנוצר הוא משולש מיוחד, וגם העובדה ששואלים אותנו על גודלה של זווית, מבלי שייתנו לנו גדלים אמתיים של זוויות עוזר לנו להגיע לאותה מסקנה. אם כן, ננסה להבין באיזה משולש מיוחד מדובר – משולש ישר זווית ושווה שוקיים, משולש זהב או משולש שווה צלעות.

במקרה זה, כל אחת מצלעות המשולש שווה לאלכסון על פאת הקובייה, ומכאן שכל צלעותיו של המשולש שוות. כלומר, מדובר במשולש שווה צלעות וכל אחת מזוויותיו שווה ל- 60°.

תשובה (4).
