הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-8)

1. נתון כי מרובע ABCD הוא מקבילית, ושואלים אותנו איזה מבין המשולשים שבתשובות אינו דומה למשולש EAG.

נזכיר כי משולשים דומים אם זוויות המשולשים שוות זו לזו, כאשר מספיק להראות שלמשולשים יש שתי זוויות שוות. לכן, נבדוק האם למשולשים עליהם נשאלנו יש שתי זוויות זהות בגודלן לאלו של המשולש EAG.

נגדיר $\measuredangle EAG = x$

הישרים AD ו-BC הם ישרים מקבילים (ABCD מקבילית), ומכאן ש- $\measuredangle EAG = \measuredangle EBH = x$ (זוויות מתאימות). למשולשים EAG ו-EBH יש שתי זוויות שוות ולכן המשולשים דומים.

נמשיך לסמן זוויות. $\measuredangle ADC = \measuredangle EBH = x$ (זוויות נגדיות במקבילית). למשולשים EAG ו-FDG יש שתי זוויות שוות ולכן המשולשים דומים.

נמשיך לסמן זוויות. ראינו כי הישרים AD ו-BC הם ישרים מקבילים, ולכן $\measuredangle ADC = \measuredangle BCF = x$ (זוויות מתאימות). למשולשים FCH ו-FDG יש שתי זוויות שוות ולכן המשולשים דומים.

תשובה (4).

---

2. נתון כי שלושה תותחים יורים יחד ברגע מסוים. כמו כן, נתון כי התותח הראשון יורה כל 2 שניות, השני כל 3 שניות, והשלישי כל 5 שניות. שואלים אותנו כעבור כמה שניות יירו שוב שלושת התותחים **יחד**.

<u>**דרך א'**</u>: הבנה אלגברית

התותח הראשון יורה כל 2 שניות, כלומר השני כל 3 שניות, והשלישי כל 5 שניות. כדי למצוא מתי יירו שלשת התותחים שוב יחד, עלינו למצוא את המספר הקטן ביותר המתחלק ב-2, ב-3 וב-5. המספר הזה הוא מכפלת שלשת המספרים, כלומר $30\ (= 2 \cdot 3 \cdot 5)$, ולכן התותחים יירו יחד בכל 30 שניות.

<u>**דרך ב'**</u>: בדיקת התשובות המוצעות

<u>תשובה (1)</u>: התותח השני יורה בכל 3 שניות. 10 אינו לא כפולה של 3 ולכן לא ייתכן שהתותח השני יירה לאחר 10 שניות. התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: התותח הראשון יורה בכל 2 שניות. 15 הוא לא כפולה של 2 ולכן לא ייתכן שהתותח הראשון יירה לאחר 15 שניות. גם תשובה זו נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: התותח הראשון יורה כל 2 שניות, ולכן יירה גם לאחר 30 שניות $\left(\frac{30}{2} = 15\right)$. התותח השני יורה כל 3 שניות, ולכן גם הוא יירה לאחר 30 שניות $\left(\frac{30}{3} = 10\right)$. התותח השלישי יורה כל 5 שניות, ולכן גם הוא יירה לאחר 30 שניות $\left(\frac{30}{5} = 6\right)$. זו התשובה הנכונה.

לצורך שלמות ההסבר נבדוק גם את התשובה הנותרת:

<u>תשובה (4)</u>: התותח הראשון יורה בכל 2 שניות. 45 הוא לא כפולה של 2 ולכן לא ייתכן שהתותח הראשון יירה לאחר 45 שניות. גם תשובה זו נפסלת.

תשובה (3).

---

3. לפנינו ביטוי מספרי – נפשט אותו לפי חוקי חזקות ושורשים.

ראשית, נמיר את השורש שבמונה לחזקה: $\frac{\sqrt{4^4}}{4} = \frac{\sqrt[2]{4^4}}{4} = \frac{4^{\frac{4}{2}}}{4} = \frac{4^2}{4}$

נותר לנו לצמצם את המונה והמכנה: $\frac{4^2}{4} = \frac{{}^{1}\cancel{4}\cdot 4}{{}_{1}\cancel{4}} = 4$

תשובה (4).

4. נתון כי באשכול ענבים היו 48 ענבים. יוסי אכל $\frac{2}{3}$ מהם, ולאחר מכן שולה אכלה $\frac{3}{4}$ מהענבים שהותיר. שואלים אותנו כמה ענבים נותרו באשכול לאחר ששניהם אכלו. נחשב זאת באופן הבא:

יוסי אכל $\frac{2}{3}$ מ-48 ענבים, כלומר $32 \left(\frac{2}{{}_{1}\cancel{3}}\cdot \cancel{48}^{16} = \right)$ ענבים. מכאן שלאחר שסיים לאכול נותרו באשכול $16 \left(48-32=\right)$ ענבים. שולה אכלה $\frac{3}{4}$ מהענבים שהותיר יוסי, כלומר $12 \left(\frac{3}{{}_{1}\cancel{4}}\cdot \cancel{16}^{4} = \right)$ ענבים, ומכאן שלאחר שסיימה לאכול נותרו באשכול רק $4 \left(16-12=\right)$ ענבים.

תשובה (4).

5. נתון מלבן ABCD. כידוע סכום שטחי המשולשים AEB ו-EDF שווה לסכום שטחי המשולשים BEF ו-FDC. נגדיר את FCD עליו נשאלנו באמצעות x ונפתור את המשוואה: $x = 3 \Leftarrow 4+5=6+x$

תשובה (3).

6. בסרטוט הנתון מופיעים מספר שבילים המחברים בין נקודה A לנקודות א, ב, ו-ג, דרך שתי נקודות: ימנית ושמאלית. שואלים אותנו מה היחס בין הסיכוי שאדם יגיע לנקודה א לבין הסיכוי שיגיע לנקודה ב.

נבדוק כמה מסלולים מובילים לנקודה א וכמה לנקודה ב:

כדי להגיע לנקודה א על האדם לעבור בהכרח דרך הנקודה הימנית, ואז לבחור לעבור לנקודה א. כלומר, יש רק מסלול אפשרי אחד דרכו ניתן להגיע מנקודה A לנקודה א.

כדי להגיע לנקודה ב על האדם לעבור דרך הנקודה הימנית, ואז לבחור לעבור לנקודה ב, או לחלופין לעבור דרך הנקודה השמאלית, ואז לבחור לעבור לנקודה ב. כלומר, יש שני מסלולים אפשריים דרכם ניתן להגיע מנקודה A לנקודה ב.

נסכם – יש פי 2 אפשרויות להגיע לנקודה ב ביחס לנקודה א, ולכן הסיכוי להגיע לנקודה ב גדול פי 2 מהסיכוי להגיע לנקודה א.

תשובה (2).

7. נתון שהאותיות A ו-B מייצגות ספרות שונות בין 1 ל-9. כמו כן נתונות שתי משוואות:

$A+B=9$ ו- $\frac{2}{9}AB = BA$.

שואלים אותנו איזו ספרה מייצגת האות A.

<u>דרך א'</u>: בדיקת התשובות המוצעות

<u>תשובה (1)</u>: $A=5$. מהמשוואה הראשונה נסיק כי $B=4$. נציב את A ו-B במשוואה השנייה ונבדוק האם גם היא מתקיימת. קיבלנו פסוק שקר שכן $\frac{2}{9}\cdot 54 = 12$ ולא 45. לכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: $A=6$. מהמשוואה הראשונה נסיק כי $B=3$. נציב את A ו-B במשוואה השנייה ונבדוק האם גם היא מתקיימת. קיבלנו פסוק שקר שכן $\frac{2}{9}\cdot 63=14$ ולא 36. לכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: $A=7$. מהמשוואה הראשונה נסיק כי $B=2$. נציב את A ו-B במשוואה השנייה ונבדוק האם גם היא מתקיימת. קיבלנו פסוק שקר שכן $\frac{2}{9}\cdot 72=16$ ולא 27. לכן התשובה נפסלת.

פסלנו שלוש תשובות ולכן התשובה הנותרת בהכרח נכונה. לצורך שלמות ההסבר נבדוק גם אותה:

<u>תשובה (4)</u>: $A=8$. מהמשוואה הראשונה נסיק כי $B=1$. נציב את A ו-B במשוואה השנייה ונבדוק האם גם היא מתקיימת. קיבלנו פסוק אמת שכן $\frac{2}{9}\cdot 81=18$. זו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: אלגברה

ראשית עלינו לטפל במשוואה השנייה ולהציג אותה בצורה נוחה יותר:

נכפול את שני צדי המשוואה ב-9 ונקבל: $2\cdot AB=9\cdot BA$

נשתמש בפירוק עשרוני ונקבל: $2\cdot(10A+B)=9\cdot(10B+A)$

נפתח סוגריים ונקבל: $20A+2B=90B+9A$

נעביר אגפים ונקבל: $11A=88B$

נחלק את שני צדי המשוואה ב-11 ונקבל: $A=8B$. אנחנו יודעים ש-A ו-B הם שני מספרים שלמים, שונים זה מזה, בין 1 ל-9. על מנת שהמשוואה שקיבלנו תתקיים על A להיות שווה ל-8 ועל B להיות שווה ל-1. מצאנו את ערכו של A עליו נשאלנו, ולכן אין לנו צורך במשוואה הראשונה.

תשובה (4).

---

8. נשאלנו איזה מבין הביטויים שבתשובות **אינו** שווה לממוצע של a, b, c ו-d, כלומר ל- $\frac{a+b+c+d}{4}$.

נבדוק אותן:

<u>דרך א'</u>: הצבת דוגמה מספרית

כדי להימנע בפישוט אלגברי של הביטויים שבתשובות נציב דוגמה מספרית: $a=b=c=d=2$. במקרה זה הממוצע של ארבעת האיברים יהיה גם הוא 2. נשאלנו איזה מהביטויים **אינו** בהכרח שווה לממוצע, ולכן עלינו לחפש ביטוי שהערך שמתקבל מהצבת המספרים בו אינו שווה ל-2. הערך שמתקבל בתשובה (4) שווה ל- $1\left(\frac{2+2+2}{2}-\frac{2}{2}=\right)$, ולכן זו התשובה הנכונה.

<u>דרך ב'</u>: אלגברה

נעבור על הביטויים שבתשובות ונפשט אותם עד שנמצא ביטוי ש**אינו** שווה לממוצע של ארבעת האיברים. **הערה**: אנחנו לא חייבים לבדוק את התשובות בהתאם לסדר שבו הן נתונות. תמיד כדאי לעבור עליהן במהירות ולחפש תשובה חשודה ממנה נתחיל את הבדיקה. במקרה זה, אם נזהה כי המקדם של d בתשובה (4) שלילי, נוכל לקבוע כי הביטוי **אינו** יכול לייצג את ממוצע האיברים (שכן נוסחת הממוצע עוסקת בסכום איברים ולא בהפרש ביניהם).

<u>תשובה (4)</u>: $\frac{a+b+c-d}{4}\left(=\frac{a+b+c}{4}-\frac{d}{4}\right)$. מכאן שזו התשובה הנכונה. אין צורך לבדוק גם את שאר התשובות.

תשובה (4).

הסקה מתרשים (שאלות 9-12)

9. נתבקשנו למצוא איזה מבין כמויות סוגי הפסולת שיוצרה בכל אחת מהשנים 2002-2004 לא ירדה ביחס לשנה שקדמה לה.

נזכור כי כמות הפסולת שיוצרה בשנה מסוימת מתוארת על ידי גובהה הכולל של העמודה הרלוונטית בתרשים. ניתן לראות כי כמות הפסולת מסוג נייר נותרה זהה בשנים 2002 ו-2003 ועלתה בשנת 2004, ולכן זו התשובה הנכונה.

לצורך שלמות ההסבר נבדוק גם את שאר סוגי הפסולת. כמות הפלסטיק מסוג פלסטיק ירד בשנת 2004 ביחס לשנת 2003 , וכך גם כמות הפסולת מסוג זכוכית וכמות הפסולת מסוג מתכת.

תשובה (1).

---

10. נתון ש-A הוא אחוז פסולת הזכוכית שמוחזרה מתוך פסולת הזכוכית שיוצרה בשנה מסוימת, ושואלים אותנו מהו ה-A המינימלי על פי נתוני התרשים.

נזכור כי כמות הפסולת שיוצרה בשנה מסוימת מתוארת על ידי גובהה הכולל של העמודה הרלוונטית בתרשים, וכי כמות הפסולת שמוחזרה בשנה מסוימת מתוארת על ידי גובהה של העמודה האפורה.

נמצא את A בכל אחת מהשנים ונגלה מהו ה-A המינימלי.

בשנת 2001 יוצרו 25,000 טונות של זכוכית ומתוכן מוחזרו 10,000 טונות. A יהיה שווה ל-
$40\%\left(=\frac{40}{100}=\frac{10}{25}\right)$.

בשנת 2002 יוצרו 50,000 טונות של זכוכית ומתוכן מוחזרו 10,000 טונות. A יהיה שווה ל-
$20\%\left(=\frac{20}{100}=\frac{10}{50}\right)$. תשובה (1) נפסלת.

בשנת 2003 יוצרו 60,000 טונות של זכוכית ומתוכן מוחזרו 35,000 טונות. גם מבלי לחשב את A באופן מדויק ניתן לראות כי הוא גבוה מ-20% באופן משמעותי (מעל 50%). לכן התשובה נפסלת.

בשנת 2004 יוצרו 45,000 טונות של זכוכית ומתוכן מוחזרו 40,000 טונות. גם כאן לא צריך לחשב את A באופן מדויק כדי לדעת כי הוא גבוה משמעותית מ-20%.

אם כן, A המינימלי שווה ל-20%.

תשובה (2).

---

11. נתון כי "שנה משופרת" היא שנה שבה לגבי 3 סוגי פסולת לפחות, **כמות** הפסולת שמוחזרה הייתה **גדולה** מהכמות שמוחזרה בשנה הקודמת, ושואלים אותנו כמה שנים כאלו יש בתרשים. נבדוק כמה שנים משופרות יש בתרשים:

שנת 2002 היא שנה משופרת שכן **כמויות** הפסולת מסוג נייר, פלסטיק ומתכת שמוחזרו בשנה זו היו **גדולות** מהכמויות שמוחזרו בשנת 2001.

שנת 2003 היא שנה משופרת שכן **כמויות** הפסולת מסוג נייר, פלסטיק וזכוכית שמוחזרו בשנה זו היו **גדולות** מהכמויות שמוחזרו בשנת 2002.

שנת 2004 אינה שנה משופרת שכן רק **כמויות** הפסולת מסוג זכוכית שמוחזרו בשנה זו היו **גדולות** מהכמויות שמוחזרו בשנת 2003.

תשובה (1).

---

12. נתון כי העירייה מרוויחה 200 שקלים על כל טונה פסולת נייר שממוחזרת, ומפסידה 100 שקלים על כל טונה פסולת נייר שאינה ממוחזרת, ושואלים אותנו איזה סכום כסף נוסף היה לעירייה בשנת 2001, אם כל פסולת הנייר בשנה זו הייתה ממוחזרת.

ראשית עלינו למצוא כמה פסולת נייר לא מוחזרה בשנה זו. בשנת 2001 יוצרו 40 טון נייר ומתוכם מוחזרו רק 10 טון נייר. כלומר, 30 טון נייר לא מוחזרו.

כעת נחשב כמה הייתה מרוויחה העירייה. העיריה ספגה קנס של 100 שקלים כל 30 טון נייר שלא מוחזרו, כלומר 3,000 שקלים בסך הכול. סכום זה חוזר לקופת העירייה. בנוסף, העירייה הייתה מרוויחה 200 שקלים על כל טונה פסולת. כלומר, 6,000 שקלים נוספים.

בסך הכול, העירייה הייתה מרוויחה 9,000 שקלים.

תשובה (1).

שאלות ובעיות (שאלות 13-20)

13. נתונות שלוש משוואות בשלושה נעלמים (a, b ו-x), ומבקשים מאתנו למצוא את ערכו של אחד מהם (x).

__דרך א'__: אלגברה

נביע את a ו-b באמצעות x. נתון ש- $a=\frac{1}{3}x$ וש- $b=\frac{1}{4}(x-a)$. כלומר, a כבר מובע באמצעות x ו-b מובע באמצעות x ו-a. נציב $\frac{1}{3}x$ במקום a ונקבל $b=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{3}x\right)$.

נסדר את המשוואה ונקבל ש- $b=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{3}x\right)\Rightarrow b=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}x\right)\Rightarrow b=\frac{1}{6}x$.

כעת נציב $a=\frac{1}{3}x$ ו- $b=\frac{1}{6}x$ במשוואה השלישית ונקבל:

$$a+b=210\Rightarrow\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}x=210\Rightarrow\frac{3}{6}x=210\Rightarrow\frac{1}{2}x=210\Rightarrow x=420$$

__דרך ב'__: בדיקת התשובות המוצעות

בתשובות נתון לנו ערכו של הנעלם x. נציב אותו במשוואות ונבדוק מתי לא מתקיימת סתירה בין כל הנתונים. מכיוון שנתון ש- $a=\frac{1}{3}x$, נבדוק קודם תשובות עגולות ויפות שקל לחשב $\frac{1}{3}$ מהן.

__תשובה (3)__: 360. במקרה זה a יהיה שווה ל- $120\left(\frac{1}{3}\cdot360=\right)$, ומכאן ש-b יהיה שווה ל- $60\left(\frac{1}{4}\cdot(360-120)=\frac{1}{4}\cdot240=\right)$. נציב את a ו-b שקיבלנו ונקבל $120+60=210$. זהו כמובן פסוק שקר ולכן התשובה נפסלת.

__תשובה (4)__: 420. במקרה זה a יהיה שווה ל- $140\left(\frac{1}{3}\cdot420=\right)$, ומכאן ש-b יהיה שווה ל- $70\left(\frac{1}{4}\cdot(420-140)=\frac{1}{4}\cdot280=\right)$. נציב את a ו-b שקיבלנו ונקבל $140+70=210$. זהו כמובן פסוק אמת ולכן זוהי התשובה הנכונה. אין צורך לבדוק גם את שאר התשובות.

תשובה (4).

---

14. נתון גביע גלידה בצורת חרוט שרדיוס בסיסו שווה ל-2 ס"מ, וגובהו $\frac{30}{\pi}$ ס"מ. שואלים אותנו מה הנפח של שני כדורי גלידה, כאשר ידוע שנפחו של כל כדור מהווה 75% מנפח הגביע.

ראשית, נחשב את נפח הגביע באמצעות הנוסחה לחישוב נפח חרוט (כופלים את שטח בסיס החרוט בגובה שלו, ואת התוצאה מחלקים ב-3):

שטח בסיס החרוט שווה ל- $4\pi\left(\pi r^2=\pi 2^2=\right)$ סמ"ר. גובה החרוט כאמור הוא $\frac{30}{\pi}$ ס"מ.

נציב בנוסחה ונקבל שנפח החרוט שווה ל- $40 = \left(\frac{4\cancel{\pi}\cdot\frac{30}{\cancel{\pi}}}{3} = \frac{4\cdot\cancel{30}^{10}}{\cancel{3}_1}\right)$ סמ"ק.

כעת נחשב את נפח שני הכדורים. כל כדור מהווה 75% מנפח החרוט, כלומר ל-
$30\left(\frac{75}{100}\cdot 40 = \frac{3}{_1\cancel{4}}\cdot \cancel{40}^{10} = \right)$ סמ"ק, ומכאן שנפח שני הכדורים יחד שווה ל-60 סמ"ק.

תשובה (2).

---

15. נתונה המשוואה: $A = -\left(x^2\right) + 7$ ושואלים אותנו מהו התחום המדויק שבו A נמצא.

__דרך א'__: הבנה אלגברית

x^2 בהכרח שווה או גדול מ-0. לכן האיבר $-\left(x^2\right)$ בהכרח שווה ל-0 או קטן ממנו.

נתון ש-A שווה לסכום של שני איברים: 7 ו- $-\left(x^2\right)$. אם נוסיף ל-7 מספר קטן מ-0 הוא בהכרח יקטן, ואם נוסיף לו בדיוק 0 הוא יישאר 7. מכאן ש-A יכול להיות שווה ל-7 או למספר קטן ממנו. $A \le 7$.

__דרך ב'__: הצבת דוגמה מספרית

נציב מספר כלשהו במקום x על מנת לקבל את ערכו של A, ונשתמש בערך שקיבלנו כדי לפסול תשובות.
נניח ש-x שווה ל-1. במקרה זה A יהיה שווה ל-6. לפי תשובה (1) A חייב להיות גדול או שווה ל-7, ולכן התשובה נפסלת. $A = 6$ נמצא בטווח של כל שאר התשובות, ולכן לא ניתן לפסול אותן בשלב זה.

עלינו להציב מספר נוסף. כדי לפסול את תשובות (2) ו-(3) עלינו להוכיח ש-A יכול לקבל ערך נמוך מ-(-7). ואכן ניתן להציב במקום x מספר גדול יחסית, נניח 10, ולקבל ש-A יכול להיות שווה גם ל-
$-93 \left(= -\left(10^2\right) + 7 = -100 + 7 = \right)$. תשובות (2) ו-(3) נפסלות גם כן, ולכן תשובה (4) בהכרח נכונה.

תשובה (4).

---

16. על מערכת צירים נתונים לנו שלושה קדקודים של משולש שווה צלעות: $(0,m)$, $(4,m)$ ו-$(2,0)$, ושואלים אותנו מה הוא ערכו של m.

ניתן לראות כי הישר AB מקביל לציר ה-x (לנקודות A ו-B יש אותו ערך של y). נתייחס ל-AB כאל בסיס המשולש שווה הצלעות ונוריד אליו גובה מנקודה C לנקודה D. נקבל שני משולשי זהב: ADC ו-DBC.

אורך הניצב הקטן (AD) במשולש ADC שווה ל-2, ומכאן ש-CD שווה ל- $2\sqrt{3}$ (במשולש זהב הניצב הגדול גדול פי $\sqrt{3}$ מהניצב הקטן).

כיוון ש-CD הוא גובה במשולש וגם m מייצג את גובה המשולש, נקבע כי $m = 2\sqrt{3}$.

תשובה (1).

---

17. לפנינו שאלת טווחים. נתון שבחנות יש 30 עטים ב-7 צבעים שונים. כמו כן, נתון שהעטים נמכרים ב-9 מחירים שונים. שואלים אותנו מהו המספר **המקסימלי** של עטים שמחירם 10 שקלים וצבעם אדום.

ראשית עלינו למצוא כמה מן העטים, לכל היותר, יכולים להיות בצבע אדום, וכמה מן העטים, לכל היותר, יכולים להימכר ב-10 שקלים. לבסוף נעשה חפיפה מקסימלית בין שתי הקבוצות, כלומר נבחר בקבוצה הקטנה מביניהן.

נתון שבחנות יש עטים ב-7 צבעים שונים. על מנת שמספר העטים האדומים יהיה מקסימלי, נרצה שיהיו כמה שפחות עטים משאר הצבעים, כלומר רק עט אחד בכל צבע אחר. מכאן שיהיו 6 עטים שאינם אדומים, ושאר העטים, 24 בסך הכול, יהיו אדומים.

כמו כן, נתון שהעטים בחנות נמכרים ב-9 מחירים שונים. על מנת שמספר העטים שנמכרים ב-10 שקלים יהיה מקסימלי, נרצה שיהיו כמה שפחות עטים שנמכרים במחיר אחר, כלומר שרק עט אחד יימכר בכל מחיר אחר. מכאן שיהיו 8 עטים שלא נמכרים ב-10 שקלים, ושאר העטים, 22 בסך הכול, יימכרו ב-10 שקלים.

כעת נחפוף בין הקבוצות. נזכיר כי חפיפה מקסימלית שווה לגודל הקבוצה הקטנה מבין הקבוצות שאנו חופפים. במקרה זה מספר העטים האדומים הוא 24, ומספר העטים שנמכרים ב-10 שקלים הוא 22, ולכן החפיפה המקסימלית היא 22.

תשובה (3).

---

18. גלגל משלים 10 סיבובים מלאים ב-90 שניות, ומבקשים מאתנו למצוא את מהירות הגלגל בקירוב.

אנחנו יודעים שמהירות היא היחס בין זמן לבין מרחק, ולכן עלינו למצוא את המרחק שעבר הגלגל ב-90 שניות.

נתון שרדיוס הגלגל הוא 3 מטרים. היקף הגלגל הוא 6π $\left(2r\pi = 2\cdot 3\cdot \pi =\right)$ מטרים, או בקירוב 18 מטרים $\left(\pi \approx 3.14\right)$, ומכאן שבכל סיבוב מלא שהגלגל משלים, הוא עובר כ- 18 מטרים.

הגלגל עובר 10 סיבובים מלאים ב-90 שניות, כלומר כ-180 מטרים ב-90 שניות. מכאן שהוא עובר $2 \left(=\frac{180}{90}\right)$ מטרים בכל שנייה.

תשובה (2).

---

19. לפנינו בעיה מילולית עם מספר נעלמים. נתון שמחיר כרטיס לסרט הוא a שקלים, n חברים הלכו אליו ו-k חברים מתוכם לא הביאו ארנק. כמו כן, נתון שהחברים שהביאו ארנק התחלקו שווה בשווה בתשלום על הכרטיסים של אלו שלא הביאו עמם ארנק. מבקשים שנביע באמצעות הנעלמים את מספר השקלים ש**הוסיף** כל חבר עם ארנק, מעבר לכרטיס שקנה לעצמו.

נפתור באמצעות אלגברה. כל אחד מ-k החברים שלא הביאו ארנק היה אמור לשלם a שקלים על כרטיס לסרט. מכאן שהיו אמורים לשלם יחד $a\cdot k$ שקלים. אם הגיעו לסרט n חברים בסך הכול, ו-k מתוכם לא שילמו, אז מספר החברים שחלקו ביניהם את התשלום על הכרטיסים של אלו שלא הביאו עמם ארנק הוא $n-k$. נחלק את עלות הכרטיסים של מי שלא שילם $\left(a\cdot k\right)$ במספר החברים שחלקו בהוצאה $\left(n-k\right)$, ונקבל $\frac{a\cdot k}{n-k}$. זוהי התוספת ששילם כל חבר עם ארנק מעבר למחיר הכרטיס שקנה לעצמו.

תשובה (1).

---

20. לפנינו שאלה העוסקת בתכונות של מספרים שלמים – במקרה זה זוגי ואי-זוגי. נתון כי ההפרש בין ריבועי שני מספרים שלמים וחיוביים (n ו-m) הוא מספר זוגי, ושואלים איזו מהטענות שבתשובות **אינה** נובעת מהנתון.

ננתח את נתוני השאלה בטרם נבדוק את הטענות שבתשובות:

n ו-m הם מספרים שלמים, ולכן גם הריבועים שלהם (n^2 ו- m^2) הם מספרים שלמים. על מנת שההפרש בין m^2 ל- n^2 יהיה זוגי, על שניהם להיות זוגיים, או לחלופין על שניהם להיות אי-זוגיים. אנחנו יודעים שבחזקות רק הבסיס קובע האם מספר יהיה זוגי או אי-זוגי (זוגי בחזקה שלמה = זוגי, אי-זוגי בחזקה שלמה = אי-זוגי) ולכן ניתן להסיק ש-m ו-n שניהם זוגיים, או לחלופין ששניהם אי-זוגיים.

כעת נעבור לבדוק את הטענות שבתשובות ונראה כי תשובה (1) לפיה m ו-n **חייבים** להיות זוגיים **אינה** נובעת מן הנתונים.

לצורך שלמות ההסבר נעבור גם על שאר התשובות ונסביר מדוע הן בהכרח נכונות:

<u>תשובה (2)</u>: חיבור של שני מספרים זוגיים או לחלופין של שני מספרים אי-זוגיים בהכרח נותן תוצאה זוגית.

<u>תשובה (3)</u>: הפרש בין שני מספרים זוגיים או לחלופין בין שני מספרים אי-זוגיים בהכרח נותן תוצאה זוגית.

<u>תשובה (4)</u>: נפשט את הביטוי באמצעות נוסחת הכפל המקוצר השלישית ונקבל: $(n-m)(n+m)$.

ראינו כי הסכום של n ו-m הוא בהכרח זוגי, ולכן מתחלק ב-2. באותו אופן גם ההפרש בין n ו-m הוא בהכרח זוגי, ולכן גם הוא מתחלק ב-2. מכפלה של שני מספרים שמתחלקים ב-2 בהכרח תתחלק ב-4.

תשובה (1).