הסברים

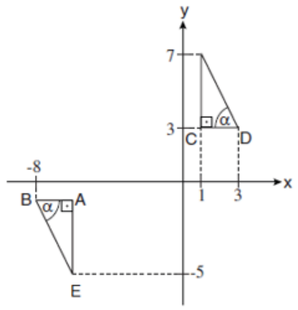
שאלות ובעיות (שאלות 8-1)

1. על גבי מערכת צירים נתונים שני משולשים ישרי זוויות חופפים שניצביהם מקבילים לצירים.

ניתן לראות כי אורכו של הניצב שמול זווית α במשולש הימני שווה ל- $4\ (=7-3)$, ושאורכו של הניצב הנוסף שווה ל- $2\ (=3-1)$. אלו גם אורכי הניצבים במשולש השמאלי החופף לו.

אם אורכו של ניצב AB במשולש השמאלי הוא 2, וערך ה-x של נקודה B שווה ל-(-8), הרי שערך ה-x של נקודה A חייב להיות שווה ל-(-6).

באותו אופן, אם אורכו של ניצב AE במשולש השמאלי הוא 4, וערך ה-y של נקודה E שווה ל-(-5), הרי שערך ה-y של נקודה A חייב להיות שווה ל-(-1).



תשובה (4).

---

2. נשאלנו איזה מהביטויים שבתשובות שווה ל- 27^3. מכיוון שכל הביטויים שבתשובות הן חזקות שבסיסן 3, נרצה להציג את הביטוי 27^3 באותו אופן.

ידוע כי $27=3^3$, ומכאן שאת 27^3 ניתן להציג גם כך: $\left(3^3\right)^3$. לפי חוקי חזקות $\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$, ולפיכך הביטוי שווה ל- $3^9\ \left(=3^{3\cdot3}\right)$.

תשובה (3).

---

3. נשאלנו איזה מאי-השוויונות שבתשובות נכון **בהכרח**, אם ידוע ש- $a<2b$ וש- $b<5$.

דרך א': הבנה אלגברית

אם נתון ש-b קטן מ-5, וש-a קטן מפעמיים b, הרי ש-a **בהכרח** קטן מ-10.

דרך ב': הצבת דוגמה מספרית

נציב דוגמה מספרית מתאימה לנתוני השאלה, ובעזרתה ננסה לפסול שלוש תשובות.

מהנתון השני עולה שיש להציב במקום b מספר קטן מ-5. נציב למשל $b=4$.

נציב $b=4$ בנתון הראשון ונקבל ש-a צריך להיות קטן מ-8. לפיכך, ניתן להציב למשל $a=7$.

כלומר, $b=4$ ו- $a=7$ מקיימים את נתוני השאלה.

נותר לנו להציב את המספרים שבחרנו בתשובות, ולנסות לפסול שלוש מהן:

<u>תשובה (1)</u>: $7<10$. קיבלנו פסוק אמת, ולכן לא ניתן לפסול את התשובה בשלב זה.

<u>תשובה (2)</u>: $7<4$. קיבלנו פסוק שקר, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: $7<5$. קיבלנו פסוק שקר, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (4)</u>: $7<3$. קיבלנו פסוק שקר, ולכן התשובה נפסלת.

פסלנו שלוש תשובות, ולכן התשובה הנותרת בהכרח נכונה.

תשובה (1).

4. בסרטוט נתונים שני משולשים, ושואלים אותנו פי כמה גדול שטחו של אחד מהם ביחס לאחר.

מכיוון שהמשולשים דומים (מדובר במצב מוכר – דמיון שעון חול, ואפשר גם להוכיח זאת באמצעות זוויות המשולשים – זוג זוויות קודקודיות זהות, וזוג זוויות נתונות ששוות 90°), נקבע כי יחס השטחים שלהם שווה לריבוע היחס הקווי שלהם. לכן, אם נתונות לנו צלעות מתאימות במשולשים, אחת מהן בגודל a, והאחרת בגודל $5a$, נקבע כי היחס הקווי בין המשולשים הוא $1:5$, ולפיכך יחס שטחי המשולשים שווה ל- $1:25\ (1^2:5^2 \Rightarrow)$. כלומר, שטחו של המשולש הגדול (הבהיר) גדול פי 25 משטחו של המשולש הקטן (הכהה).

תשובה (4).

---

5. נשאלנו כמה מספרים שונים בעלי חמש ספרות ניתן ליצור מהספרות 7, 7, 5, 5 ו-2, כך שהספרה הראשונה והאחרונה במספר יהיו אותן ספרות.

מכיוון שמדובר במספר קטן יחסית של אפשרויות, נפרוט אותן באופן שיטתי על הדף.

אם הספרה הראשונה היא 7, הרי שאפשר לקבל את המספרים 72557, 75257 ו-75527, ואם הספרה הראשונה היא 5, הרי שאפשר לקבל את המספרים 52775, 57275 ו-57725. הספרה הראשונה לא יכולה להיות 2, שכן אז הספרה הראשונה והאחרונה לא יהיו זהות.

נותר לנו לספור כמה מספרים מצאנו, ונראה כי יש בסך הכל 6 מספרים מתאימים לתנאים בשאלה.

תשובה (2).

---

6. נשאלנו מה מספר הבולים **הקטן ביותר האפשרי** שניתן לחלקו שווה בשווה ל-2 (שני בנים), ל-5 (חמישה נכדים), ול-7 (~~חמישה~~ שני בנים ~~ושני~~ וחמישה נכדים).

נבדוק את התשובות המוצעות. נתחיל מהמספר **הקטן ביותר** ומשם נעלה.

תשובה (1): 14 אינו מתחלק ב-5, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (2): 35 אינו מתחלק ב-2, ולכן התשובה נפסלת.

תשובה (3): 70 מתחלק ב-2, ב-5 וב-7, ולכן זו התשובה הנכונה.

אין צורך לבדוק תשובות נוספות.

הערה: 2, 5 ו-7, הם שלושה מספרים ראשוניים שונים זה מזה, ולכן המספר הקטן ביותר שמתחלק בשלושתם הוא בהכרח המכפלה שלהם. כלומר, $70\ (=2\cdot5\cdot7)$.

תשובה (3).

---

7. נתון שמשקלן הממוצע של שלוש גורילות הוא 135 ק״ג, ושואלים אותנו מה צריך להיות משקלה של גורילה רביעית כדי שהמשקל הממוצע של ארבעתן יהיה 120 ק״ג.

אם המשקל הממוצע של 3 גורילות הוא 135 ק״ג, הרי שלפי נוסחת הממוצע סכום המשקלים שלהן חייב להיות שווה ל- $405\ (=3\cdot135)$ ק״ג.

באותו אופן, כדי שממוצע המשקלים של 4 גורילות יהיה 120 ק״ג, סכום המשקלים שלהן צריך להיות $480\ (=4\cdot120)$ ק״ג.

לפיכך, כדי שממוצע המשקלים של 4 הגורילות יהיה שווה ל-120 ק״ג, משקל הגורילה הרביעית חייב להיות שווה ל- $75\ (=480-405)$ ק״ג.

תשובה (2).

---

8. נתון שבשמורת טבע יש 25 מיני פרחים, $\frac{4}{5}$ מהמינים מוגנים, ו- $\frac{3}{5}$ מהמינים בצבע סגול. עלינו למצוא בתשובות מספר **שיכול להיות** מספר מיני הפרחים המוגנים שצבעם סגול בשמורה.

נחשב מהו **טווח** המספרים של מיני פרחים מוגנים בצבע סגול שיכולים להיות בשמורה, ואז ניגש לבדוק את התשובות המוצעות. נעשה זאת באמצעות שימוש בנוסחאות החפיפה.

מהנתונים עולה כי $20 \left(= \frac{4}{5} \cdot 25\right)$ מתוך 20 מיני פרחים בשמורה הם **מוגנים**, ו- $15 \left(= \frac{3}{5} \cdot 25\right)$ מתוך מיני הפרחים בשמורה הם **בצבע סגול**.

החפיפה המקסימלית של **פרחים מוגנים בצבע סגול** שווה לגודל הקבוצה הקטנה מבין הקבוצות, כלומר ל-15.

החפיפה המינימלית של **פרחים מוגנים בצבע סגול** שווה לסכום הקבוצות אותן אנו חופפים בניכוי השלם, כלומר ל- $10 \left(= 20 + 15 - 25\right)$.

לפיכך, יכולים להיות בין 10 ל-15 פרחים מוגנים בצבע סגול בשמורה. נבדוק את התשובות המוצעות ונראה כי רק תשובה (2) מתאימה.

תשובה (2).

הסקה מתרשים (שאלות 9-12)

9. נשאלנו באילו שבועות היו לבת-חן 3 שירים במצעד בו זמנית.

כל שיר של בת-חן מסומן באמצעות קו מקווקו.

נבדוק את התשובות המוצעות ונחפש תקופה שבה מופיעים שלושה קווים מקווקוים:

<u>תשובה (1)</u>: 1-4. לאורך תקופה זו מופיע רק קו מקווקו אחד. התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: 5-9. לאורך תקופה זו מופיע רק קו מקווקו אחד. התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: 10-14. בתקופה זו ~~יש~~ מופיעים שלושה קווים מקווקווים (שיר אחד שלאורך התקופה בילה במקום הראשון, שיר נוסף שבילה במקומות השלישי עד השישי, ושיר שלישי שבילה במקומות ה-17 עד ה-20). זו התשובה הנכונה.

תשובה (3).

---

10. מגדירים "זמרת חזקה" כזמרת שכל אחד מהשירים שלה דורג באחד משלושת המקומות הראשונים בשבוע שבו נכנס למצעד, ועלינו למצוא מי מבין הזמרות עומדת בהגדרה.

נזכור כי כאשר שיר נכנס לראשונה למצעד הוא מסומן באמצעות עיגול בצבע מסוים המציין את סגנונו. כלומר, עלינו להתמקד בעיגולים שבתרשים. נבדוק כל כניסה חדשה של שיר שלא מדורג באחד משלושת המקומות הראשונים, ונפסול זמרות להן הוא שייך.

יש שיר שנכנס בשבוע הראשון למקום ה-14. זהו שיר של בת-חן, ולכן היא אינה זמרת חזקה.

יש שיר שנכנס בשבוע הרביעי למקום ה-17. זהו שיר של אורלי, ולכן היא אינה זמרת חזקה.

יש שיר שנכנס בשבוע ה-17 למקום ה-4. זהו שיר של דורין, ולכן היא אינה זמרת חזקה.

בת-חן, אורלי ודורין אינן זמרות חזקות, ולפיכך הזמרת החזקה היא בהכרח גלית.

תשובה (3).

.11 נשאלנו כמה משירי הרוק בתרשים עלו בדירוג במצעד בשלב כלשהו, ולאחר מכן ירדו בדירוג.

נתמקד בשירי רוק שכניסתם למצעד מסומנת בתרשים באמצעות עיגול ועליו פסים אלכסוניים.

יש שיר רוק שנכנס בשבוע הראשון למצעד ישירות למקום הראשון, הוא מגיע בשבוע ה-**10** למקום ה-**10**, עולה למקום ה-**9**, ואז שוב יורד בדירוג.

יש שיר רוק שנכנס בשבוע הראשון למצעד למקום ה-14. הוא עולה עד למקום ה-3, ובהמשך יורד.

יש שיר רוק שנכנס בשבוע ה-16 למצעד ישירות למקום הראשון, אך הוא אינו עולה בדירוג לכל אורך שהותו במצעד.

יש שיר רוק שנכנס בשבוע ה-17 למקום החמישי במצעד. הוא יורד מקום אחד, חוזר למקום ה-17, ושוב יורד מקום אחד. כלומר, הוא עולה בדירוג במצעד בשלב כלשהו, ואז יורד בדירוג.

נסכם: יש שלושה שירים שעלו בדירוג במצעד בשלב כלשהו, ולאחר מכן ירדו בדירוג.

תשובה (3).

.12 נתון שבאחד מ-10 השבועות הראשונים דורג במקום הראשון שיר שאינו מופיע בתרשים. שבוע לאחר מכן דורג שיר זה במקום x, ולאחר עוד שבוע דורג שוב במקום הראשון. שואלים אותנו איזה מהמספרים שבתשובות יכול להיות שווה ל-x.

ניתן לראות שהמקום הראשון כבר תפוס ב-7 מתוך עשרת השבועות הראשונים בתרשים. לפיכך, השיר יכול להיות מדורג במקום הראשון רק בשבועות ה-4, ה-6 וה-9. השיר לא יכול להיות מדורג לראשונה במקומות ה-6 או ה-9, שכן אז הוא צריך להיות מדורג שוב במקום הראשון בשבוע ה-8 וה-11 בהתאמה, ובשניהם כבר מופיע בשבועות אלה שיר במקום הראשון.

כלומר, ניתן להסיק כי השיר הופיע במקום הראשון בשבוע ה-4, ואז שוב בשבוע ה-6.

כעת נבדוק את התשובות המוצעות.

<u>תשובה (1)</u>: 5. המקום ה-5 תפוס בשבוע החמישי על ידי שיר של אורלי. התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: 8. המקום ה-8 תפוס בשבוע החמישי על ידי שיר של בת-חן. התשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: 11. המקום ה-11 תפוס בשבוע החמישי על ידי שיר של דורין. התשובה נפסלת.

פסלנו שלוש תשובות ולכן התשובה הנותרת בהכרח נכונה.

תשובה (4).

שאלות ובעיות (שאלות 13-20)

.13 נתון שגלגל שרדיוסו $\frac{1}{4}$ מטר מתגלגל 4 סיבובים בכל 12 שניות, ושואלים אותנו כמה מטרים הוא יעבור בשנייה.

היקף גלגל שרדיוסו $\frac{1}{4}$ מטר שווה ל- $\frac{\pi}{2}\left(2\cdot\pi\cdot\frac{1}{4}=\right)$ מטרים. זהו המרחק שעובר הגלגל בכל סיבוב.

אם בכל 12 שניות הגלגל מסתובב 4 סיבובים, שהם $2\pi\left(4\cdot\frac{\pi}{2}=\right)$ מטרים, הרי שבכל שנייה הוא עובר $\frac{\pi}{6}\left(\frac{2\pi}{12}=\right)$ מטרים.

תשובה (1).

---

14. שואלים אותנו מה יהיה גובהו של עץ בסוף השנה הרביעית לחייו, אם ידוע כי בשנה הראשונה הוא גבה במטר אחד, ובכל שנה שלאחר מכן הוא גבה במחצית מהגובה שנוסף לו בשנה הקודמת.

מנתוני השאלה עולה כי בשנה הראשונה גדל העץ ב-1 מטר, בשנה השנייה הוא גדל ב- $\frac{1}{2}$ מטר, בשנה השלישית ב- $\frac{1}{4}\left(=\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)$ מטר, ובשנה הרביעית ב- $\frac{1}{8}\left(=\frac{\frac{1}{4}}{2}\right)$ מטר.

מכאן שגובהו של העץ בתום השנה הרביעית יהיה $1\frac{7}{8}\left(=\frac{15}{8}=\frac{8}{8}+\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)$ מטרים.

הערה: בתום השנה הראשונה היה גובהו של העץ 1 מטר. מכיוון שבכל אחת מהשנים הבאות מוסיפים לו מחצית ממה שחסר לו כדי להגיע לגובה של 2 מטרים, ניתן להגיע למסקנה כי העץ אף פעם לא יגיע לגובה זה. רק תשובה (4) קטנה מ-2, ולכן היא בהכרח נכונה.

תשובה (4).

---

15. מבקשים שנבדוק את התשובות המוצעות ונמצא מספר ש**אינו** יכול להיות תוצאה של מספר שלם שהעלו בריבוע ואז חישבו את עצרת התוצאה שהתקבלה, או לחלופין תוצאה של מספר שלם שחישבו את העצרת שלו, ואז העלו את התוצאה בריבוע.

המספרים בתשובות קטנים, ולכן הפעולה נעשתה בהכרח על מספרים שלמים קטנים. לפיכך, אפשר לנסות להגיע לשלושה מתוך ארבעת המספרים שבתשובות באמצעות ניסוי וטעיה, ולסמן את התשובה הנותרת.

נניח שהמספר הוא 1. אם נעלה אותו בריבוע $1\left(=1^2\right)$, ואז נעשה עצרת לתוצאה, נקבל $1\left(=1!\right)$, ואם נחשב קודם עצרת שלו $1\left(=1!\right)$, ואז נעלה את התוצאה בריבוע, נקבל גם כן $1\left(=1^2\right)$. זה לא עוזר לנו לפסול אף אחת מהתשובות, ולכן נמשיך למספר השלם הבא.

נניח שהמספר הוא 2. אם נעלה אותו בריבוע $4\left(=2^2\right)$, ואז נעשה עצרת לתוצאה, נקבל $24\left(=4!\right)$, ואם נחשב קודם עצרת שלו $2\left(=2!\right)$, ואז נעלה את התוצאה בריבוע, נקבל $4\left(=2^2\right)$. תשובות (2) ו-(4) יכולות להיות התוצאה של הפעולות, ולכן הן נפסלות. נותר לנו להכריע בין תשובות (1) ו-(3), ולכן נמשיך למספר הבא.

נניח שהמספר הוא 3. אם נעלה אותו בריבוע $9\left(=3^2\right)$, ואז נעשה עצרת לתוצאה, נקבל $9!$ (אין צורך לחשב), ואם נחשב קודם עצרת שלו $6\left(=3!\right)$, ואז נעלה את התוצאה בריבוע, נקבל $36\left(=6^2\right)$. תשובה (3) נפסלת.

פסלנו שלוש תשובות, ולכן התשובה הנותרת בהכרח נכונה.

תשובה (1).

---

16. נתון ש-a הוא 75% מ-b, כלומר ש- $a=\frac{75}{100}\cdot b$. כמו כן, נתון ש-b הוא x% מ-c, כלומר ש- $b=\frac{x}{100}\cdot c$.

מבקשים שנביע את a באמצעות x ו-c.

נפתור את השאלה בדרך אלגברית.

נציב $b=\frac{x}{100}\cdot c$ בנתון הראשון ונקבל $a=\frac{75}{100}\cdot\frac{x}{100}\cdot c$. נפשט את צד ימין של המשוואה ונקבל:

$$a=\frac{3x}{400}\cdot c\quad\left(a=\frac{3}{4}\cdot\frac{x}{100}\cdot c\Rightarrow\right)$$

תשובה (4).

---

17. **הערה**: בשאלה זו הושמט בטעות נתון לפיו $y=0$, ולכן השאלה בוטלה. עם זאת, החלטנו להראות בכל זאת פתרון מלא של השאלה, בהינתן שהנתון היה מופיע כנדרש.

נתון ש-y הוא מספר **שלם**, וכמו כן ש- $x=y+\sqrt{2}$ וש- $y=0$. שואלים אותנו איזו מהטענות בתשובות נכונה **בהכרח**, ולכן יש לבדוק אותן.

נזכיר כי $\sqrt{2}$ **אינו שלם**, וכי הוא שווה בקירוב ל-1.41.

<u>תשובה (1)</u>: נציב $x=y+\sqrt{2}$ בביטוי $(x+y)^2$, ונקבל: $(2y+\sqrt{2})^2\left(=(y+\sqrt{2}+y)^2\right)$

נפתח את הביטוי שקיבלנו באמצעות נוסחת הכפל המקוצר הראשונה, ונקבל: $4y^2+4y\cdot\sqrt{2}+2$.

$4y^2$ ו-2 הם שלמים, אך $4y\cdot\sqrt{2}$ אינו שלם. לפיכך, הביטוי $(x+y)^2$ **אינו** שלם, והתשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>: נציב $x=y+\sqrt{2}$ בביטוי $(x-y)^2$, ונקבל: $2\left(=(\sqrt{2})^2=(y+\sqrt{2}-y)^2\right)$. לפיכך הביטוי $(x-y)^2$ שלם, והתשובה נפסלת.

<u>תשובה (3)</u>: נציב $x=y+\sqrt{2}$ בביטוי $x\cdot y$, ונקבל: $y^2+\sqrt{2}y\left(=(y+\sqrt{2})\cdot y\right)$. y^2 הוא שלם, אך $\sqrt{2}y$ אינו שלם. לפיכך, הביטוי $x\cdot y$ **אינו** שלם. התשובה נפסלת.

פסלנו שלוש תשובות, ולכן התשובה הנותרת בהכרח נכונה. למען שלמות ההסבר נבדוק גם אותה:

<u>תשובה (4)</u>: נציב $x=y+\sqrt{2}$ בביטוי x^2, ונקבל: $(y+\sqrt{2})^2$. נפתח את הביטוי שקיבלנו באמצעות נוסחת הכפל המקוצר הראשונה, ונקבל: $y^2+2y\cdot\sqrt{2}+2$. y^2 ו-2 הם שלמים, אך $2y\cdot\sqrt{2}$ אינו שלם. לפיכך, הביטוי x^2 **אינו** שלם, וזו התשובה הנכונה.

תשובה (4).

---

18. נתונות שתי משוואות בשני נעלמים: $2x+y=60$ ו- $x+2y=30$, ושואלים אותנו איזו מהמשוואות שבתשובות **אינה** נכונה. נבדוק את התשובות:

<u>תשובה (1)</u>:

$$\begin{array}{r} 2x+y=60 \\ -\quad x+2y=30 \\ \hline x-y=30 \end{array}$$

המשוואה נכונה על פי הנתונים, ולכן התשובה נפסלת.

<u>תשובה (2)</u>:

$$\begin{array}{r} 2x+y=60 \\ +\quad x+2y=30 \\ \hline 3x+3y=90 \end{array}$$

נחלק את שני צדי המשוואה ב-3, ונקבל $x+y=30$. המשוואה נכונה על פי הנתונים, ולכן התשובה נפסלת.

בשלב זה יש לנו שתי משוואות פשוטות $x-y=30$ ו- $x+y=30$, מהן ניתן להסיק ש- $x=30$ ו- $y=0$.

כדי להכריע בין תשובות (3) ו-(4), נציב את הערכים של x ו-y במשוואות. נקבל ש<u>בתשובה (3)</u> מתקבל פסוק אמת $(60=60)$, ו<u>בתשובה (4)</u> מתקבל פסוק שקר $(120=60)$. לפיכך, המשוואה שבתשובה (4) אינה נכונה.

תשובה (4).

---

19. עלינו למצוא את גודלה של זווית מרכזית α במעגל החוסם ריבוע ומשושה משוכלל.

אם נעביר בניית עזר רדיוס ממרכז המעגל O לעבר נקודה D המהווה **קודקוד משותף** למשושה המשוכלל ולריבוע, נראה כי הוא מחלק את זווית מרכזית α לשתי זוויות מרכזיות: $\angle COD$ ו- $\angle HOD$

$\angle COD$ היא זווית מרכזית הנשענת על צלע ריבוע החסום במעגל, ולכן גודלה $90^\circ\left(=\frac{360^\circ}{4}\right)$.

$\angle HOD$ היא זווית מרכזית הנשענת על צלע משושה משוכלל החסום במעגל, ולכן גודלה $60^\circ\left(=\frac{360^\circ}{6}\right)$.

לפיכך, הזווית המרכזית α שווה ל- $150^\circ\left(=90^\circ+60^\circ\right)$.

תשובה (3).

---

20. נתונה מנסרה משולשת שכל פאותיה הצדדיות הן ריבועים ששטח כל אחד מהם $\sqrt{3}$ סמ"ר, ומבקשים שנמצא את שטח הבסיס של המנסרה.

נזהה כי כל אחת מצלעות המשולש המהווה את בסיס המנסרה היא צלע ריבוע ששטחו $\sqrt{3}$ סמ"ר.
מכיוון שהריבועים בעלי אותו שטח, נסיק כי הם בהכרח זהים, ולפיכך בסיס המנסרה הוא משולש שווה צלעות.

אם שטחו של ריבוע הוא $\sqrt{3}$ סמ"ר, הרי שאורך צלעו (המהווה צלע של המשולש) שווה ל- $\sqrt{\sqrt{3}}$ סמ"ר.

נציב $\sqrt{\sqrt{3}}$ בנוסחה לחישוב שטח משולש שווה צלעות $\left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right)$, ונקבל: $\frac{3}{4}$ סמ"ר

$$\left(\frac{\sqrt{\sqrt{3}}^{2} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{4} = \right)$$

תשובה (4).